

VŠB – Technická univerzita Ostrava

Fakulta strojní

Katedra mechaniky

Dynamická analýza rotoru leteckého motoru

Dynamical analysis of an aircraft engine rotor

Student:

Bc. Jana Liberdová

Vedoucí diplomové práce:

prof. Ing. Jaroslav Zapoměl, DrSc.

Ostrava 2010

Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Jana Liberdová**
Studijní program: N2301 Strojní inženýrství
Studijní obor: 3901T003 Aplikovaná mechanika
Téma: **Dynamická analýza rotoru leteckého motoru**
Dynamical Analysis of an Aircraft Engine Rotor

Zásady pro vypracování:

Technickým problémem je :

- stanovení Campbellova diagramu
- stanovení amplitudo frekvenční charakteristiky rotoru leteckého motoru s uvážením neurčitostí jeho uložení, tlumení a buzení nevývahou.

K řešení technického problému má být použita metoda počítačového modelování.

Postup řešení :

- provedení analýzy rotoru podle technické dokumentace a stanovení jeho podstatných vlastností z hlediska řešeného problému,
- sestavení výpočtového modelu
- provedení výpočetních simulací
- vyhodnocení výsledků

The technological problem is

- determination of the Campbell diagram
- determination of the frequency response characteristic of the aircraft engine rotor taking into account uncertainties of the supports stiffness, damping and unbalance excitation.

Procedure :

- carrying out the analysis of the rotor according to the technical documentation and determination of its properties that are substantial from the point of view of the solved problem,
- setting up the computational model
- carrying out the computational simulations
- evaluation of the results.

Seznam doporučené odborné literatury:

- [1] Technická dokumentace rotoru
- [2] Slavík J., Stejskal V., Zeman V.: Základy dynamiky strojů, Vydavatelství ČVUT, Praha 1997
- [3] Gasch R., Pfützner H.: Dynamika rotorů, SNTL, Praha 1980

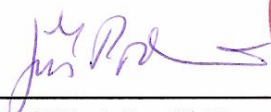
- [4] Lalanne M., Ferraris M.: Rotordynamics Prediction in Engineering, John Wiley & Sons, Chichester 1990
[5] Juliš K., Brepta R.: Mechanika II.díl - Dynamika, SNTL, Praha 1987

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí diplomové práce: **prof. Ing. Jaroslav Zapoměl, DrSc.**

Datum zadání: 30.11.2009

Datum odevzdání: 21.05.2010



doc. Ing. Jiří Podešva, Ph.D.
vedoucí katedry



prof. Ing. Radim Farana, CSc.
děkan fakulty

Místopřísežné prohlášení studenta

Prohlašuji, že jsem celou diplomovou práci včetně příloh vypracovala samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a uvedla jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě 17. 5. 2010

..... Liberdová

podpis studenta

Prohlašuji, že

- jsem byla seznámena s tím, že na moji diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo.
- беру на вѣдомі, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen „VŠB-TUO“) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě diplomovou (bakalářskou) práci užít (§ 35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že diplomová práce bude v elektronické podobě uložena v Ústřední knihovně VŠB-TUO k nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího diplomové práce. Souhlasím s tím, že údaje o kvalifikační práci, obsažené v Záznamu o závěrečné práci, umístěném v příloze mé kvalifikační práce, budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užít své dílo – diplomovou (bakalářskou) práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- беру на вѣдомі, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě 17.5. 2010

Liberdová
.....

podpis

Jana Liberdová
Průjezdní 1242
Horní Suchá

ANOTACE DIPLOMOVÉ PRÁCE

LIBERDOVÁ, J. *Dynamická analýza rotoru leteckého motoru*. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra mechaniky, 2010, 63 s. Diplomová práce, Vedoucí práce: Zapoměl, J.

Diplomová práce se zabývá analýzou frekvenčních a modálních vlastností rotoru leteckého motoru a dále jeho odezvou na harmonické buzení nevývahou. Cílem analýzy je sestavení Campbellova diagramu a sestavení amplitudo – frekvenční charakteristiky rotoru s uvažováním neurčitosti jeho uložení, tlumení a buzení nevývahou. V první části práce je provedena analýza rotoru, ve které je uveden popis jednotlivých částí rotoru a stanoveny jeho vlastnosti podstatné z hlediska řešeného problému. Dále je sestavena výpočtová prutová modelová soustava, jejíž modální vlastnosti jsou naladěny prostřednictvím prostorových výpočtových modelů. Následně jsou provedeny počítačové simulace, sestavení Campbellových diagramů pro předpokládaný rozsah hodnot úhlové rychlosti otáčení, a dále sestavení amplitudo – frekvenční charakteristiky. V závěru jsou vyhodnoceny výsledky všech provedených simulací a výpočtů.

ANNOTATION OF MASTER THESIS

LIBERDOVÁ, J. *Dynamical analysis of an aircraft engine rotor*. Ostrava: VŠB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Mechanics, 2010, 63 p. Thesis head: Zapoměl, J.

The master thesis deals with frequency and modal analysis of the aircraft engine rotor and its response of the harmonic excitation. The purpose of the analysis is creation of the Campbell diagram and determination of the frequency response characteristic of aircraft engine rotor taking into account uncertainties of the supports stiffness, damping and unbalance excitation. In the first part there is an analysis of rotor which contains description of basic parts and characteristics of rotary system and which of the basic properties will be essential in a solution. Next there is setting of the 1D mathematical model system of rotor and its modal parameters are tuning by 3D mathematical models. Followed-up by performing computer simulations, determination of Campbell's graphs for supposed angular velocity and determination of the frequency response characteristic. In conclusion there are evaluated results and simulations of the rotor.

Obsah :

Seznam použitých značek a symbolů	1
0. Úvod	3
1. Formulace technického problému.....	4
1.1 Metodika řešení	5
1.2 Popis technické soustavy	5
1.2.1 Charakteristika ložisek	6
1.2.2 Parametry lopatkových kol.....	8
2. Prostorové modely	10
2.1 Geometrické parametry modelových soustav	10
2.1.1 Modelová soustava A	10
2.1.2 Modelová soustava B	12
2.2 Materiálové modely	14
2.3 Výpočtové modely.....	15
2.3.1 Modelování ložisek	16
2.3.2 Modelová soustava A	18
2.3.3 Modelová soustava B	19
2.4 Statická a modální analýza.....	21
2.4.1 Statická analýza	21
2.4.2 Modální analýza.....	24
3. Prutové modely	33
3.1 Prutový model A.....	34
3.1.1 Diskretizace modelu A	34
3.1.2 Naladění parametrů prutového modelu A pomocí statické a modální analýzy...	35
3.2 Prutový model B.....	36
3.2.1 Diskretizace modelu B	36
3.2.2 Naladění parametrů prutového modelu B	37
3.3 Zubová spojka v 1D úloze	38
3.3.1 Testovací úloha	38
3.3.2 Řešení 1D úlohy v programu Matlab	39
3.3.3 Analytický výpočet průhybu	42
3.3.4 Řešení 1D úlohy pomocí programu Ansys.....	42
3.3.5 Srovnání výsledků.....	43
3.4 Prutový model rotoru	44
3.4.1 Sférická vazba.....	44
3.4.2 Uvážení tlumení ve výpočtovém modelu.....	45
4. Dynamická analýza	47
4.1 Sestavení Campbellových diagramů pro předpokládaný rozsah hodnot úhlové rychlosti otáčení	49
4.2 Amplitudo – frekvenční charakteristika rotoru a výpočet kmitání rotoru vynuceného nevyvážeností.....	52
4.3 Vyhodnocení výsledků.....	58
5. Závěr	60
Dodatek	61
Literatura	64
Seznam příloh	65

Seznam použitých značek a symbolů

A	plocha průřezu [m^2]
a	vzdálenost středu hmotnosti kotouče od uzlu i [m]
b	rozměr kvádru [m]
\mathbf{B}	matice tlumení [-]
d_K	průměr valivého elementu [m]
d	průměr [m]
E	Youngův modul pružnosti v tahu [MPa]
f	frekvence [Hz]
\mathbf{f}	vektor zatížení [N]
F	síla [N]
g	gravitační zrychlení [$m.s^{-2}$]
\mathbf{G}	matice gyroskopických účinků [-]
h	rozměr kvádru [m]
\mathbf{I}	maticí setrvačnosti [-]
I_o	osový moment setrvačnosti kolem osy y_T [$kg.m^2$]
I_P	moment setrvačnosti kolem osy rotace [$kg.m^2$]
J	osový kvadratický moment plochy průřezu [m^4]
\mathbf{K}	matice tuhosti [-]
\mathbf{K}_C	cirkulační matice [-]
k	tuhost ložiska [N/m]
l_e	délka prvku [m]
L_V	délka valivého elementu [m]
L	délka [m]
\mathbf{M}	matice hmotnosti [-]
m	hmotnost [kg]
n	počet valivých elementů ložiska [-]
\mathbf{o}	nulový vektor [-]
r_T	poloha středu hmotnosti [m]
\mathbf{r}_S	radiusvektor obecného bodu [m]
\mathbf{S}	matice směrových kosinů [-]
t	rozměr kvádru [m]
u	posuv ve směru osy x [m]

u	vektor zobecněných posuvů
V	objem [m^3]
v	posuv ve směru osy y [m]
v	vlastní vektor [-]
w	posuv ve směru osy z [m]
x	souřadnice x [m]
x	vektor zobecněných posuvů [-]
y	souřadnice y [m]
z	souřadnice z [m]
Δ	odchylka [m]
α	Rayleigho součinitel tlumení [-]
β	Rayleigho součinitel tlumení [-]
η	součinitele viskózního tlumení materiálu [s]
θ	rotace kolem osy [rad]
λ	vlastní frekvence [$rad.s^{-1}$]
μ	Poissonovo číslo [-]
v	vlastní vektor [-]
ρ	měrná hmotnost [kg/m^3]
ψ	materiálová konstanta tlumení materiálu [-]
ω	úhlová rychlost otáčení kolem osy rotace [$rad.s^{-1}$]

0. Úvod

Rozvoj letecké dopravy sebou nese i potřebu navrhovat a vyrábět stále dokonalejší části letadel. Proto se využívají se nové výrobní postupy, ale též nové konstrukční a výpočetní metody, které umožňují urychlit a zlepšit výrobu a vývoj leteckých motorů a zvýšit jejich kvalitu a spolehlivost.

Jednou z nejdůležitějších metod výpočtové analýzy je metoda konečných prvků. Tato metoda umožňuje provést modální analýzu jednotlivých částí leteckého motoru a spočítat tak například vlastní frekvence rotoru a nebo jeho deformaci. To nám umožní navrhnout rotor tak, aby nepracoval v oblasti rezonančního pásma, což je pro správný chod motoru velice důležité. Díky moderním výpočetním metodám jsme schopni provádět modální analýzu rotoru nejen za klidu, ale také v závislosti na provozních otáčkách rotoru. V dnešní době lze díky výkonným počítačům analyzovat velmi přesné matematické modely součástí a zahrnout do výpočtového modelu všechny důležité prvky mající vliv na konečný výsledek.

Tato práce se zabývá dynamickou analýzou rotoru volné turbíny M60X. Cílem této analýzy je zjistit vlastní frekvence a vlastní tvary příčného kmitání rotoru v klidu a v závislosti na úhlové rychlosti jeho otáčení, a dále zjistit odezvu na buzení nevývahou, která se vyskytuje u všech reálných součástí. Rotor se skládá ze dvou komponent spojených zubovou spojkou, která ovlivňuje jeho statické i dynamické vlastnosti. Proto si tato práce klade za cíl reálné zahrnutí zubové spojky do výpočtového modelu.

1. Formulace technického problému

Pro správný návrh výpočtových modelů je důležité, které vlastnosti rotorové soustavy budou do těchto modelů zahrnuty. Z tohoto důvodu je potřeba provést správnou analýzu částí rotoru, které budou mít vliv na jeho chování. Tyto části pak budou zahrnuty do výpočtových modelů.

Zkoumanou soustavou je rotor volné turbíny M60X. Rotor je složen ze dvou dlouhých dutých hřídelí, které jsou spojeny zubovou spojkou. Na jedné z hřídelí je ozubené kolo. Na druhé z hřídelí jsou nalisována dvě lopatková kola. Každé kolo je osazeno 39 lopatkami. Soustava je uchycena v celkem třech valivých ložiscích.

Hřídele jsou nosnými elementy rotoru a přenáší hlavní síly. Uvažujeme je jako ohybově pružnou součást. Hřídel může být tlumená nebo netlumená. Ve výpočtu pohybující se soustavy budeme uvažovat hřídel jako tlumenou se zahrnutím vnějšího i vnitřního tlumení. Vnitřní tlumení uvažujeme jako viskózní tlumení materiálu a vnější tlumení jako tlumící vliv okolního prostředí. Tlumení bude zavedeno pomocí metody konečných prvků, pro analýzu rotující soustavy.

Důležitou částí rotoru je zubová spojka, která má vliv na tuhostní i modální vlastnosti celé soustavy. Tuhost zubové spojky ovlivňuje deformaci rotoru. Pro malé hodnoty tuhosti zubové spojky lze zavést předpoklad, že je možno zubovou spojkou s dostatečnou přesností modelovat jako kloub. Ve výpočtovém modelu je uvažována pomocí sférické vazby.

Ložiska lze do výpočtového modelu zahrnout jako absolutně tuhé nebo poddajné podpěry. Ve skutečnosti jsou ložiska poddajnými podpěrami, jejichž tuhost je funkcí geometrických parametrů, zatížení a dalších. Tuhost, jako parametr samotného ložiska, je pro jednotlivá ložiska rotoru zavedena v následujícím textu. Samotná ložiska, jsou však umístěna v rámu. Pokud do výpočtového modelu uvažíme i tuhost rámu lze celkovou tuhost uložení vypočítat jako tuhost dvou sériově řazených pružin. Z praxe lze říci, že tuhost rámu snižuje celkovou tuhost uložení až na 60 % tuhosti ložiska. Tento fakt bude zahrnut do dynamické analýzy rotující soustavy.

Z výkresové dokumentace je patrné, že tuhost lopatkových kol musí být podstatně větší než tuhost hřídelí. Proto zavedme předpoklad, že lopatková kola jsou absolutně tuhá. Parametry, které charakterizují jejich vlastnosti uvažované ve výpočtu, jsou hmotnost, poloha středu hmotnosti a momenty setrvačnosti. Pokud bychom provedli zevrubnou

modální analýzu, našli bychom také vlastní frekvence lopatek. Ty jsou však pro dynamickou analýzu nepodstatné.

1.1 Metodika řešení

Pro dynamickou analýzu rotující soustavy byl vytvořen prutový výpočtový model, který se skládá ze dvou samostatných celků spojených sférickou vazbou. Oba samostatné celky prutového výpočtového model jsou tvořeny hřídelovými prvky, které značně zjednodušují původní geometrické parametry, a proto bylo nutné naladit jejich tuhostní a modální vlastnosti. Prostředkem k jejich naladění byly prostorové výpočtové modely.

V první části práce byly pomocí programu Ansys Classic version 11, podle sestavovacího výkresu rotoru (viz. Příloha 15) vytvořeny dva samostatné výpočtové prostorové konečno – prvkové modely jednotlivých komponent. Pro každý z prostorových výpočtových modelů byla simulována statická a modální analýza. V rámci statické analýzy byl vypočten průhyb od zatížení vlastní tíhou. Výsledkem modální analýzy bylo nalezení prvních čtyř dvojic ohybových vlastních frekvencí a k nim příslušných vlastních tvarů.

Druhá část práce využívá známých dat výsledků statické a modální analýzy prostorových výpočtových modelů, které byly přijaty za správné řešení. V programu MATLAB byly vytvořeny prutové konečno – prvkové modely jednotlivých komponent rotoru podle výkresové dokumentace. Jejich geometrické parametry byly dále upravovány tak, aby výsledky statické a modální analýzy odpovídaly nám známým datům.

Jednotlivé prutové modelové soustavy byly spojeny sférickou vazbou, která v tomto modelu zastupuje funkci zubové spojky. Dále byla provedena modální analýza celé rotující soustavy rotoru. Z této analýzy vychází sestavení Cambelova diagramu pro různé hodnoty viskózního tlumení. Na prutovém modelu celého rotoru byla provedena simulace harmonického buzení nevývahou a vytvořeny amplitudo – frekvenční charakteristiky pro různé hodnoty parametrů, které podstatně ovlivňují dynamické vlastnosti rotoru.

1.2 Popis technické soustavy

Zkoumanou soustavou je rotor volné turbíny M60X. Rotor je složen ze dvou dlouhých dutých hřídelí, které jsou spojeny zubovou spojkou. Na jedné z hřídelí je ozubené kolo. Na druhé z nich jsou nalisována dvě lopatková kola. Každé kolo je osazeno 39 lopatkami. Soustava je uchycena v celkem třech ložiscích. Schéma technické soustavy a

základní rozměry jsou zobrazeny na obrázku 1. Materiál rotoru je ocel. Materiálové vlastnosti předpokládané u této oceli jsou uvedeny v tab.1.

Tab. 1: Materiálové vlastnosti

Youngův modul pružnosti [MPa]	210000
Poissonovo číslo [-]	0,3
měrná hmotnost [kg/m ³]	7800

1.2.1 Charakteristika ložisek

Jednotlivá ložiska jsou označena podle obr.1. Při výpočtu tuhosti valivých ložisek se vychází z výpočtu kontaktní deformace kroužků a valivých elementů (kuliček, válečků, soudečků, jehel apod.) podle Hertzovy teorie [1]. Za zjednodušujících předpokladů lze pro tuhost k [N/m] kuličkových ložisek odvodit vztah [3].:

$$k_K = 1.3 \cdot 10^7 \cdot \sqrt[3]{n_K^2 \cdot d_K \cdot F} \quad (1)$$

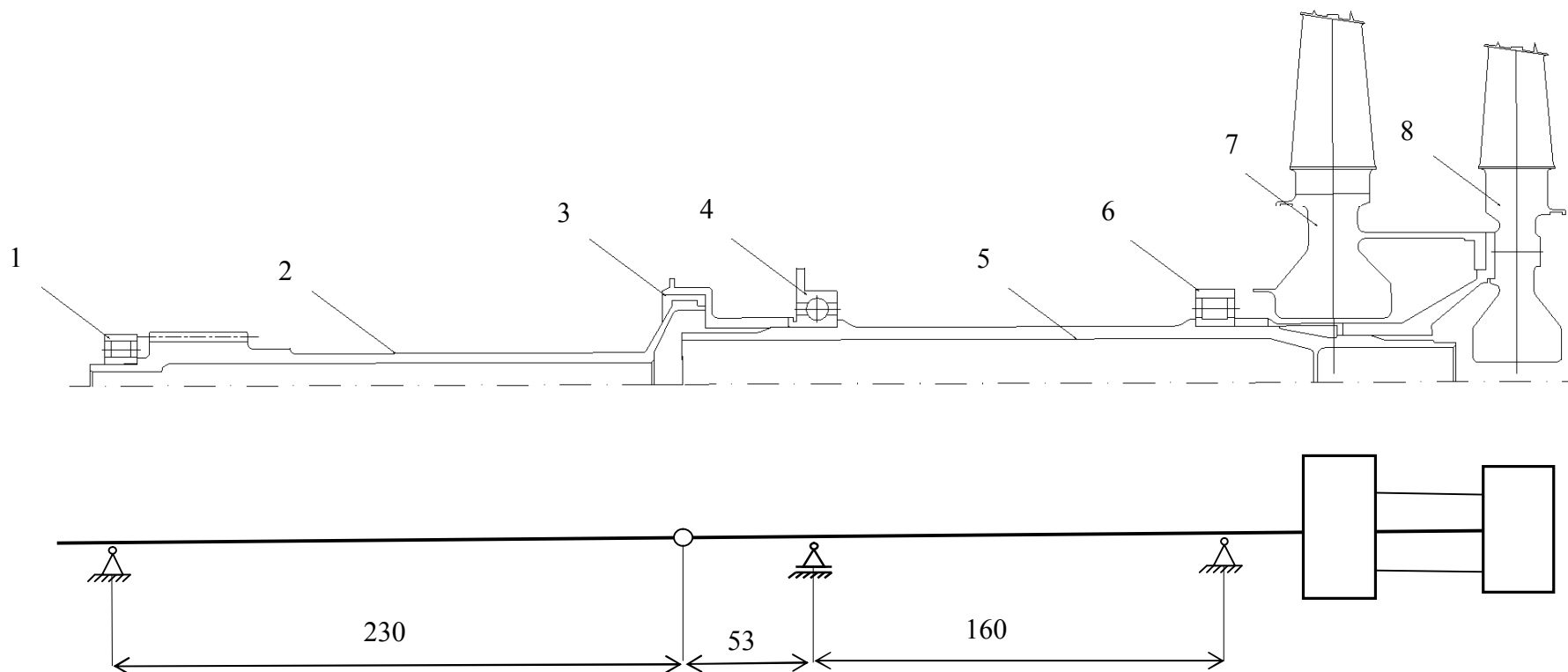
Pro válečková ložiska obdobně platí:

$$k_V = 1.005 \cdot 10^9 \cdot n_V^{0.9} \cdot L_V^{0.8} \cdot F^{0.1} \quad (2)$$

V posledních vztazích je n_K počet kuliček, n_V počet válečků, d_K [m] je průměr valivého elementu, L_V [m] je délka valivého elementu a F [N] je zatěžující síla. Jde o nelineární závislost.

Zavádíme zjednodušující předpoklad, že zatěžující síla F není závislá na otáčkách rotoru. Její hodnotu vypočteme ze zatížení vlastní tíhou. Jednotlivé zatěžující síly F jsou vypočtené hodnoty jednotlivých reakcí. Valivá ložiska vykazují tuhost ve směru působící síly a ve směru na něj kolmém. Ve výpočtu zavádíme předpoklad, že ložiska jsou izotropní. Předpokládejme tedy, že tuhost ložisek v jednotlivých směrech má hodnotu k .

Pro výpočet tuhosti kuličkového ložiska byl použit vztah (1) a pro výpočet tuhosti válečkových ložisek byl využit vztah (2). Tuhosti jednotlivých ložisek, a geometrické a zatěžující parametry použité pro jejich výpočet, jsou uvedeny v tab. 2



Obr. 1. Schéma soustavy a základní rozměry v [mm] :

1 – Ložisko A, 2 – hřídel A, 3 – zubová spojka, 4 – ložisko B, 5 – hřídel B, 6 – ložisko C, 7 - lopatkové kolo B, 8 – lopatkové kolo A.

Tab. 2: Parametry ložisek

	LOŽISKO A	LOŽISKO B	LOŽISKO C
typ ložiska	válečkové	kuličkové	válečkové
počet valivých elementů	23	20	20
délka/průměr valivého elementu[mm]	7,5	9,5	9,5
zatěžující síla [N]	6	60	223
tuhost ložiska [N/mm]	403300	79400	61700

1.2.2 Parametry lopatkových kol

Na hřídeli **B** jsou nasazena lopatková kola **A** a **B**. Každé kolo je osazeno 39 lopatkami, které jsou pod úhlem 30° . Pro výpočet zavádíme zjednodušující předpoklad, že kola jsou absolutně tuhá. Jejich základní parametry, důležité pro výpočet, jsou hmotnost, poloha středu hmotnosti a momenty setrvačnosti. Výpočet hmotnosti m je jednoduchý, jde-li o homogenní těleso o hustotě ρ , jehož objem V známe. Pak platí:

$$m = \rho \cdot V \quad (3)$$

K určení hmotnosti tělesa komplikovaného geometrického tvaru lze použít také programy pro CAD. Máme-li vyšetřované těleso k dispozici, je nejspolehlivější způsob zjištění jeho hmotnosti vážením.

Polohu středu hmotnosti tělesa popsanou vektorem \mathbf{r}_S lze vypočítat z definice statického momentu:

$$m \cdot \mathbf{r}_S = \int_{(V)} \rho \cdot \mathbf{r} \cdot dV, \quad (4)$$

kde \mathbf{r}_S je radiusvektor obecného bodu tělesa. Střed hmotnosti těles komplikovaných tvarů se dá určit použitím programu pro CAD. V našem případě byl využit program Ansys, ve kterém byl vytvářen 3D geometrický model, pro statickou a modální analýzu. Pro obvyklý případ, kdy na všechny body tělesa působí stejné tíhové zrychlení g , je střed hmotnosti (S) totožný s těžištěm (T).

Momenty setrvačnosti lze souhrnně vyjádřit maticí setrvačnosti \mathbf{I} , jejíž tvar v souřadném systému $Txyz$ je:

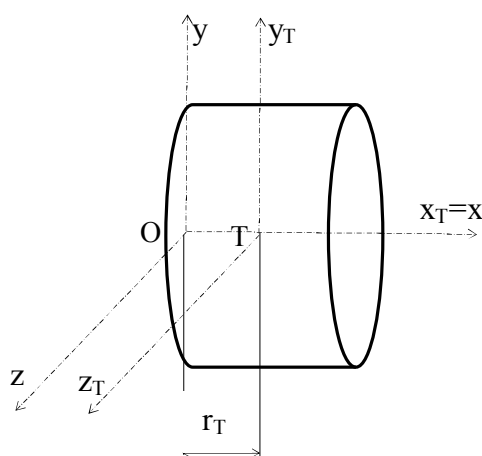
$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{xy} & I_y & -D_{zy} \\ -D_{xz} & -D_{zy} & I_z \end{bmatrix}, \quad (5)$$

kde I_x , I_y a I_z jsou momenty setrvačnosti k příslušným osám a D_{xy} , D_{xz} a D_{yz} jsou deviační momenty k rovinám určeným indexy. Pro další výpočet jsou pro nás důležité pouze osové momenty setrvačnosti. Osovému momentu setrvačnosti kolem osy rotace I_P odpovídá moment setrvačnosti k ose x I_x kotouče platí v souřadném systému $Txyz$ (viz obr.2):

$$I_P = \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm . \quad (6)$$

Osovému momentu setrvačnosti kolem osy y_T procházející těžištěm kotouče odpovídají momenty setrvačnosti k ose y I_y a ose z I_z v souřadném systému $Txyz$ (viz obr.2):

$$I_o = \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm . \quad (7)$$



Obr. 2. Souřadnicové systémy

V přiložené výkresové dokumentaci máme k dispozici hodnoty hmotnosti jednotlivých lopatkových kol, včetně lopatek, a jejich osového momenty setrvačnosti kolem osy rotace a kolem osy y_T . Z nám známé geometrie jsou dopočteny polohy středů hmotnosti. Všechny potřebné základní parametry obou kol jsou uvedeny v tab. 3.

Tab. 3: Parametry lopatkových kol s lopatkami

parametr	kolo A	kolo B
m – hmotnost [kg]	6.134	7.58
I_P - osový moment setrvačnosti kolem osy rotace [$kg.m^2$]	0.03792	0.04964
I_o - osový momentu setrvačnosti kolem osy y_T [$kg.m^2$]	0.01934	0.02547
r_T – poloha středu hmotnosti (vzdálenost od čela) [mm]	0.02605	0.0236

2. Prostorové modely

V programu Ansys Classic version 11 byly vytvořeny dvě samostatné prostorové modelové soustavy. Pro zjednodušení budeme tyto prostorové modelové soustavy nazývat model **A** a model **B**. První model **A** tvoří hřídel **A** a část zubové spojky, která k ní geometricky přísluší. Druhý model **B** tvoří hřídel **B** s oběma lopatkovými koly a zbylá část zubové spojky. Pro modelování vycházíme z rozměrů daných výkresem sestavy (viz. příloha 15).

2.1 Geometrické parametry modelových soustav

Jednotlivé součásti jsou modelovány podle geometrických rozměrů změřených z výkresu. Všechny rozměry jsou měřitelné, kromě rozměrů lopatkových kol, ozubeného kola a zubové spojky. Jejich geometrie je zjednodušená.

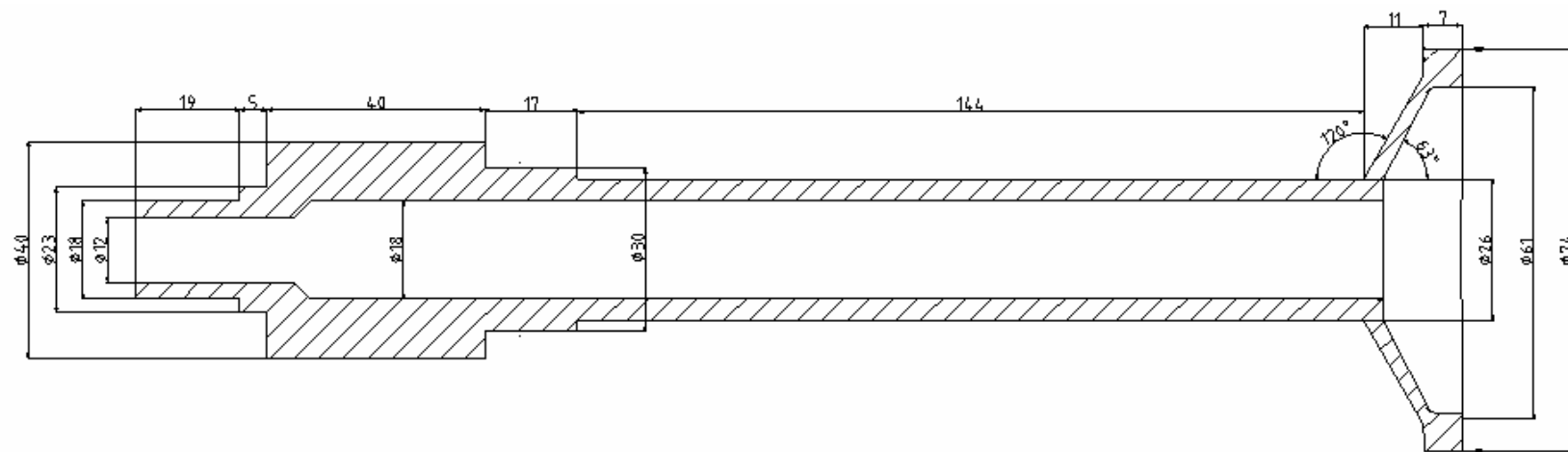
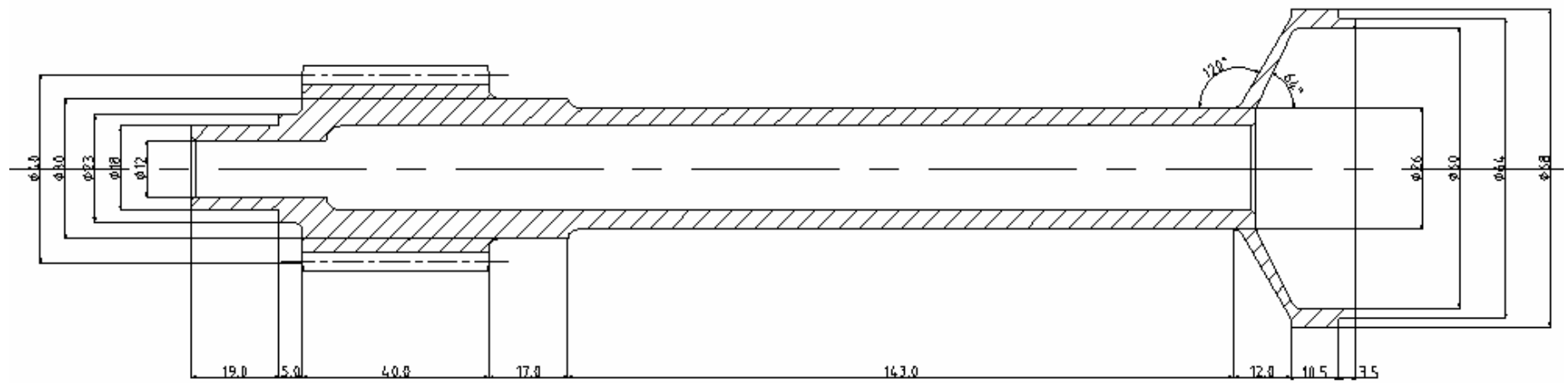
Zubová spojka nemá v prostorových modelech charakter spojení. Protože je u jednotlivých modelů důležité zachovat hmotnost a tuhost, je její hmota rozdělena podle geometrické příslušnosti. Poloha roviny řezu zubové spojky je naznačena na obr.1.

Dalším zjednodušením je zanedbání zaoblení, které je patrné z výkresu. Toto zjednodušení lze přijmout jak z hlediska změny hmoty modelových soustav, tak z hlediska požadavků na výsledky statické analýzy.

2.1.1 Modelová soustava A

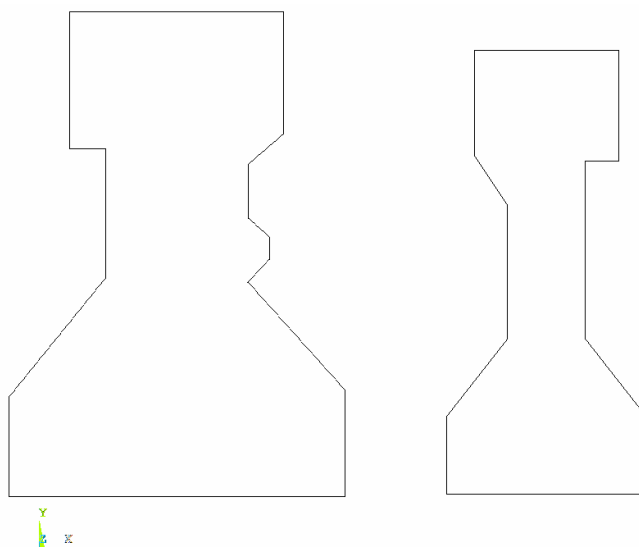
Popíšme tvorbu geometrického modelu **A**. Geometrické rozměry hřídele **A** jsou uvedeny na obr.3 a). Podle zásad uvedených v kapitole **2.1** je podle něj vytvořen v programu Ansys prostorový model, jehož rozměry jsou naznačeny na obr. 3 b).

Parametry ozubeného kola, jako počet zubů a modul nejsou uvedeny v dodané výkresové dokumentaci. S dostatečnou přesností lze ozubené kolo při modelování nahradit dutým válcem s vnějším průměrem o velikosti průměru roztečné kružnice.



2.1.2 Modelová soustava B

Tento prostorový model tvoří hřídel **B**, lopatková kola **A** a **B**, příslušná část zubové spojky a drobné hmotné části (klínky, kroužky apod.), které ovlivňují celkovou tuhost a hmotnost rotoru.



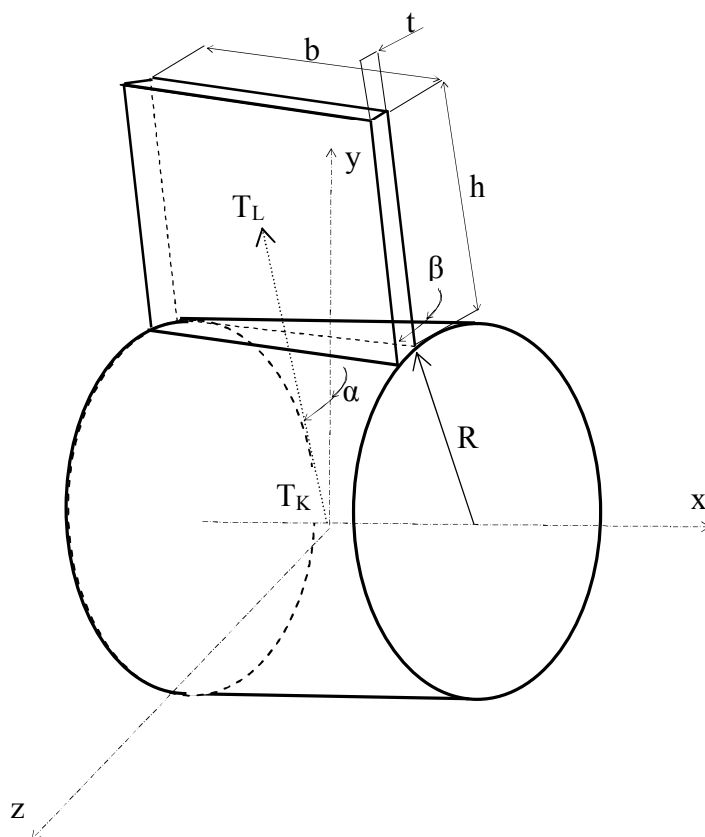
Obr. 4. Profil kol – vlevo kolo **A**, vpravo kolo **B**

Tab. 4: Parametry lopatkových kol a olopatkování

parametr	kolo A bez olopatkování	olopatkování kola A	kolo B bez olopatkování	olopatkování kola B
m – hmotnost [kg]	4.7436	1.3904	5.3578	2.2222
I_P - osový moment setrvačnosti kolem osy rotace [$kg.m^2$]	0.01875	0.02054	0.02184	0.0278
I_o - osový momentu setrvačnosti kolem osy y_T [$kg.m^2$]	0.009694	0.01016	0.01142	0.01405

V programu Ansys jsou jednotlivá lopatková kola, bez olopatkování, vytvořena rotací profilu kola (obr.4) kolem osy rotace x . Po vytvoření prostorového geometrického

modelu jednotlivých kol, byly v programu Ansys dopočteny hodnoty hmotnosti a osových momentů, jednotlivých kol bez olopatkování, které jsou uvedeny v tab. 4.



Obr. 5. Značení při výpočtu náhrady lopatek

Lopatky jsou modelovány jako kvádry, které mají takové rozměry, aby jejich hmotnost a osově momenty setrvačnosti byly shodné s původní soustavou. Neznámé rozměry náhradního kvádru t, h a b , podle značení na obr. 5, jsou dopočteny ze soustavy rovnic:

$$m_L = t \cdot b \cdot h$$

$$\sum \mathbf{I}_L = \mathbf{I}_{OL} \quad , \quad (8)$$

kde m_L je hmotnost jedné lopatky, \mathbf{I}_L je matice setrvačnosti jedné lopatky v souřadném systému T_Kxyz , kde (T_K) je těžiště celého lopatkového kola a \mathbf{I}_{OL} je matice setrvačnosti olopatkování. Hodnota matice setrvačnosti olopatkování \mathbf{I}_{OL} je uvedena v tab.4. Pro matici setrvačnosti jedné lopatky platí:

$$\mathbf{I}_L = \mathbf{S} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{S}^T + \mathbf{I}_m, \quad (9)$$

kde \mathbf{S} je matice směrových kosinů a pro obecnou lopatku je definována:

$$S = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 1 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 + \cos(\beta) & \sin(\alpha) - \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) & \sin(\beta) & \cos(\alpha) + \cos(\beta) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

a I_m je matice setrvačnosti bodového tělesa, jehož hmotnost odpovídá hmotnosti jedné lopatky, umístěného ve středu hmotnosti a pro obecnou lopatku je definován [2]:

$$I_m = m_L \begin{bmatrix} z_{TL}^2 + y_{TL}^2 & -x_{TL} \cdot y_{TL} & -x_{TL} \cdot z_{TL} \\ -x_{TL} \cdot y_{TL} & z_{TL}^2 + x_{TL}^2 & z_{TL} \cdot y_{TL} \\ -x_{TL} \cdot z_{TL} & -z_{TL} \cdot y_{TL} & x_{TL}^2 + y_{TL}^2 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Úhel α je definován jako množina $\{0^\circ:360/39^\circ:360^\circ\}$, úhel β má hodnotu 30° a odpovídá naklonění lopatky podle obr. 5, a x_{TL} , y_{TL} a z_{TL} jsou souřadnice těžiště obecné lopatky. Pro souřadnice těžiště obecné lopatky podle obr.5 platí rovnice:

$$\begin{aligned} x_{TL} &= 0 \\ y_{TL} &= \left(R + \frac{h}{2}\right) \cdot \sin(\alpha), \\ z_{TL} &= \left(R + \frac{h}{2}\right) \cdot \cos(\alpha) \end{aligned} \quad (12)$$

Rozměry kvádrů nahrazujícího jednotlivé lopatky kola **A** jsou $t = 2,6$ [mm], $b = 30$ [mm] a $h = 55$ [mm]. Rozměry kvádrů nahrazujícího jednotlivé lopatky kola **B** jsou $t = 3,6$ [mm], $b = 35$ [mm] a $h = 59$ [mm]. Další postup tvorby geometrických modelů souvisí s tvorbou sítě konečných prvků. Proto bude popsán v dalších kapitolách.

2.2 Materiálové modely

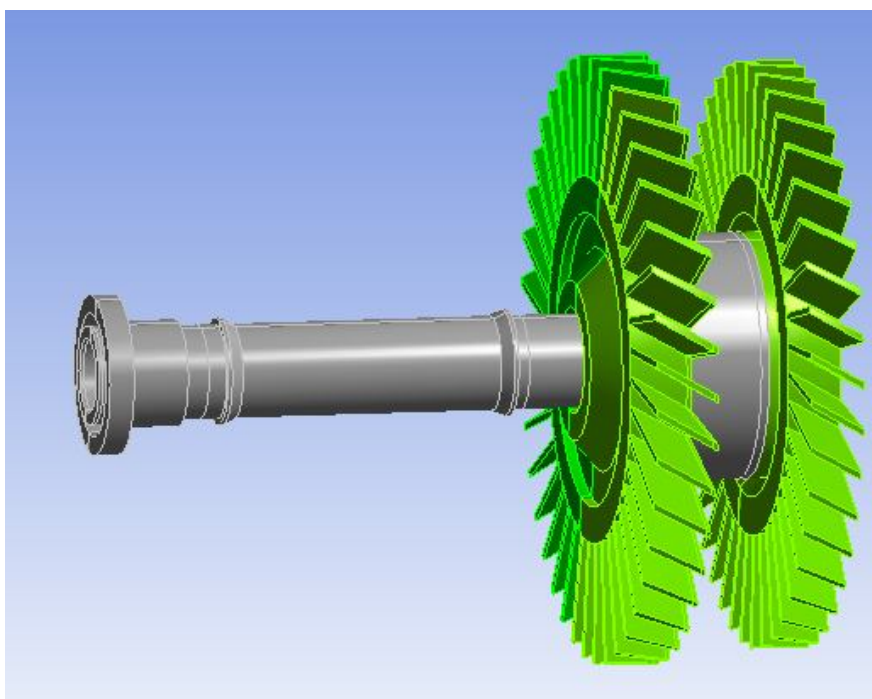
Materiálové vlastnosti rotoru jsou uvedeny v tab.1. V programu Ansys byly nastaveny dva druhy materiálových modelů. Oba materiálové modely jsou lineární, elastické a izotropní.

První model je použit pouze na lopatková kola. Při dynamických výpočtech rotorů jsou lopatková kola nahrazována absolutně tuhými kotouči. Pro přiblížení těchto vlastností je hodnota Youngova modulu pružnosti E u tohoto modelu zvýšena.

Druhý materiálový model je použit na celý model **A** a zbylé rotační části modelu **B**, včetně míst napojení lopatkových kol. Na obr. 6 vidíme geometrický model zobrazen v barvách dle přiřazeného materiálu. Vlastnosti materiálových modelů jsou uvedeny v tab.5.

Tab. 5: Vlastnosti materiálových modelů

	Materiál 1	Materiál 2
Youngův modul pružnosti [<i>MPa</i>]	210000000	210000
Poissonovo číslo [-]	0,3	0,3
měrná hmotnost [<i>kg/m³</i>]	7800	7800



Obr. 6 Model B s přiřazením barev materiálovému modelu
zeleně- materiál 1, šedě- materiál 2

2.3 Výpočtové modely

Na základě geometrie popsané v kapitole 2.1 byla provedena diskretizace na konečné prvky. Pro tvorbu výpočtových modelů byly použity čtyři typy prvků: SOLID185, MESH200, SHELL63 a COMBIN14.

SOLID185 je prostorový prvek používaný pro modelování těles. Je tvořen osmi uzly, které mají vždy tři stupně volnosti a to posuv v ose x , y a z . Tento prvek má i variantu čtyřstěnu se čtyřmi uzly [11].

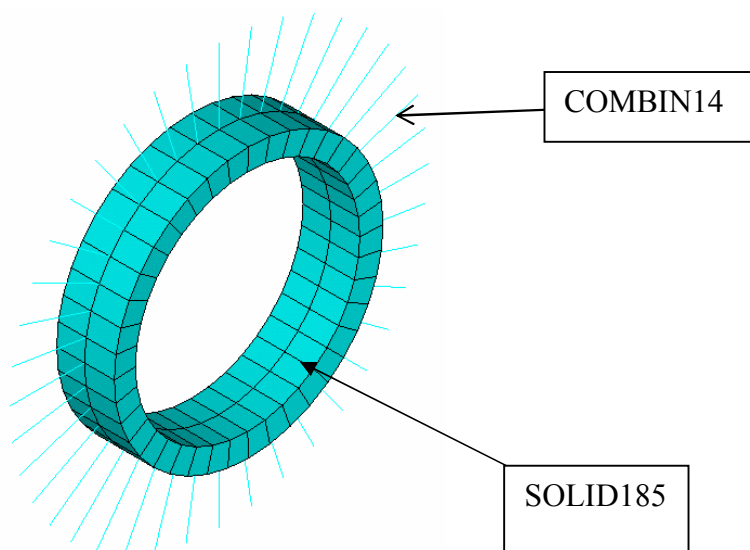
MESH200 je nepočetní prvek, jehož vlastnosti lze nastavit dle potřeb. Využívá se při tvorbě pravidelných složitějších sítí. Pro tyto modely byla využita varianta rovinného prvku se čtyřmi uzly. Rotací těchto prvků kolem osy rotace tělesa vznikala pravidelná síť prvků vyššího řádu [11].

COMBIN14 je prvek s vlastnostmi tažné – tlačné nebo torzní pružiny. Existuje ve variantách pro 1D, 2D a 3D aplikace. V těchto výpočtových modelech je použita varianta 3D tažné – tlačné pružiny, které je přiřazena tuhost. Je to jednoosý pružinový prvek se třemi stupni volnosti v každém uzlu. Tyto stupně volnosti jsou posuvy ve směru osy x , y a z . Tento prvek nepřenáší ohyb ani osovou sílu [11].

SHELL63 je rovinný prvek se čtyřmi uzly, které mají vždy šest stupňů volnosti, a to posuv v ose x , y a z a rotace kolem os x , y a z [11].

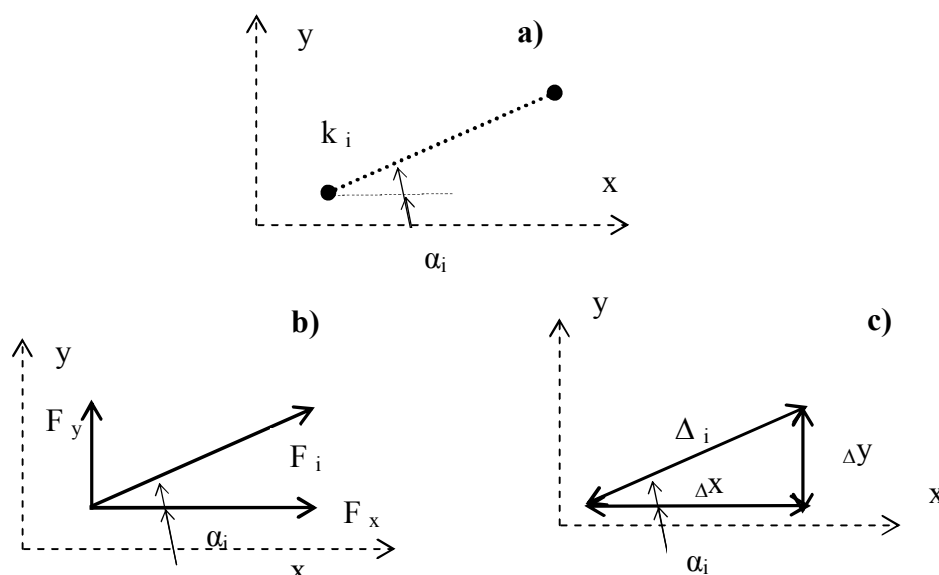
2.3.1 Modelování ložisek

Jak již bylo řečeno v kapitole 1.1.1, jednou z předpokládaných vlastností ložisek je, že jsou izotropní. Proto je možno při jejich modelování využít rotační symetrie. Dále zavedeme předpoklad, že celou tuhost ložiska lze soustředit pouze do jedné roviny, kterou dále budeme nazývat místem podpory. Každé ložisko je modelováno vždy čtyřiceti prvky COMBIN14. Názorně je jejich rozmístění zobrazeno na obr. 7. Z obrázku je patrné, že uzly prvku SOLID185 v místě podpory jsou společné s příslušnými uzly prvku COMBIN14. Druhému uzlu každého pružinového prvku jsou odebrány všechny stupně volnosti.



Obr. 7 Model ložiska

Tento způsob modelování ložiska umožňuje uvážít příčnou a svislou tuhost do výpočtového modelu. Připomeňme, že tento model podpory neumožňuje zachytit rotaci kolem osy rotační symetrie. Proto je u statických výpočtů třeba implementovat vazbové podmínky tak, aby bylo uložení tělesa staticky určité. Tyto podmínky jsou popsány pro jednotlivé modely v dalším textu.



Obr. 8 Obecný i-tý prvek

Celková tuhost příslušného ložiska, byla přepočtena pro jednotlivé prvky COMBIN14. Naznačme princip tohoto přepočtu. Na obr. 8 a) je zobrazen obecný i-tý prvek s tuhostí k_i . Pokud dojde k deformaci bude v tomto i-tém prvku působit síla F_i . Pro výpočet její velikosti platí:

$$F_i = k_i \cdot \Delta_i, \quad (13)$$

kde Δ_i je prodloužení i-té ho prvku. Sílu F_i můžeme rozložit do směru osy x a osy y podle obr. 8 b) takto:

$$\begin{aligned} F_x &= F_i \cdot \cos(\alpha_i) \\ F_y &= F_i \cdot \sin(\alpha_i) \end{aligned} \quad (14)$$

Za předpokladu, že Δx - deformace celé soustavy prvků ve směru osy x je rovna deformaci imaginární pružiny, ve které působí síla F_x , a Δy - deformace celé soustavy prvků ve směru osy y je rovna deformaci imaginární pružiny, ve které působí síla F_y platí:

$$\begin{aligned} F_x &= k_x \cdot \Delta x \\ F_y &= k_y \cdot \Delta y \end{aligned} \quad (15)$$

Z geometrie dle obr. 8 c) vyplývá:

$$\begin{aligned} \Delta_i &= \Delta x \cdot \cos(\alpha_i) \\ \Delta_i &= \Delta y \cdot \sin(\alpha_i) \end{aligned} \quad (16)$$

Po dosazení rovnic (13), (15) a (16) do rovnice (14) získáme:

$$\begin{aligned} k_x \cdot \Delta x &= (k_i \cdot \cos^2(\alpha_i)) \Delta x \rightarrow k_x = k_i \cdot \cos^2(\alpha_i) \\ k_y \cdot \Delta y &= (k_i \cdot \sin^2(\alpha_i)) \Delta y \rightarrow k_y = k_i \cdot \sin^2(\alpha_i) \end{aligned} \quad (17)$$

Za předpokladu, že jsou ložiska izotropní a $k_i=k$, lze soustavu rovnic (17) sečíst pro N dvojic na sebe kolmých prvků takto:

$$k_x + k_y = N \cdot k_i \cdot (\cos^2(\alpha_i) + \sin^2(\alpha_i)) = N \cdot k, \quad (18)$$

kde N je počet dvojic prvků a k je tuhost jednoho prvku. Z toho plyne, že pro tuhost jednoho prvku platí:

$$k = \frac{k_x + k_y}{N} \quad (19)$$

Tuhost zadaná jednomu pružinovému prvku, jež přísluší jednotlivým ložiskům, je uvedena v tab. 6.

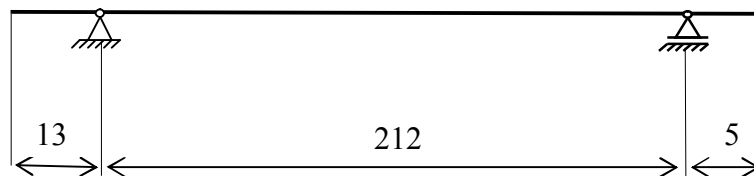
Tab. 6: Tuhost prvků COMBIN14

	LOŽISKO A	LOŽISKO B	LOŽISKO C
k tuhost prvku [N/mm]	40330	7940	6170

2.3.2 Modelová soustava A

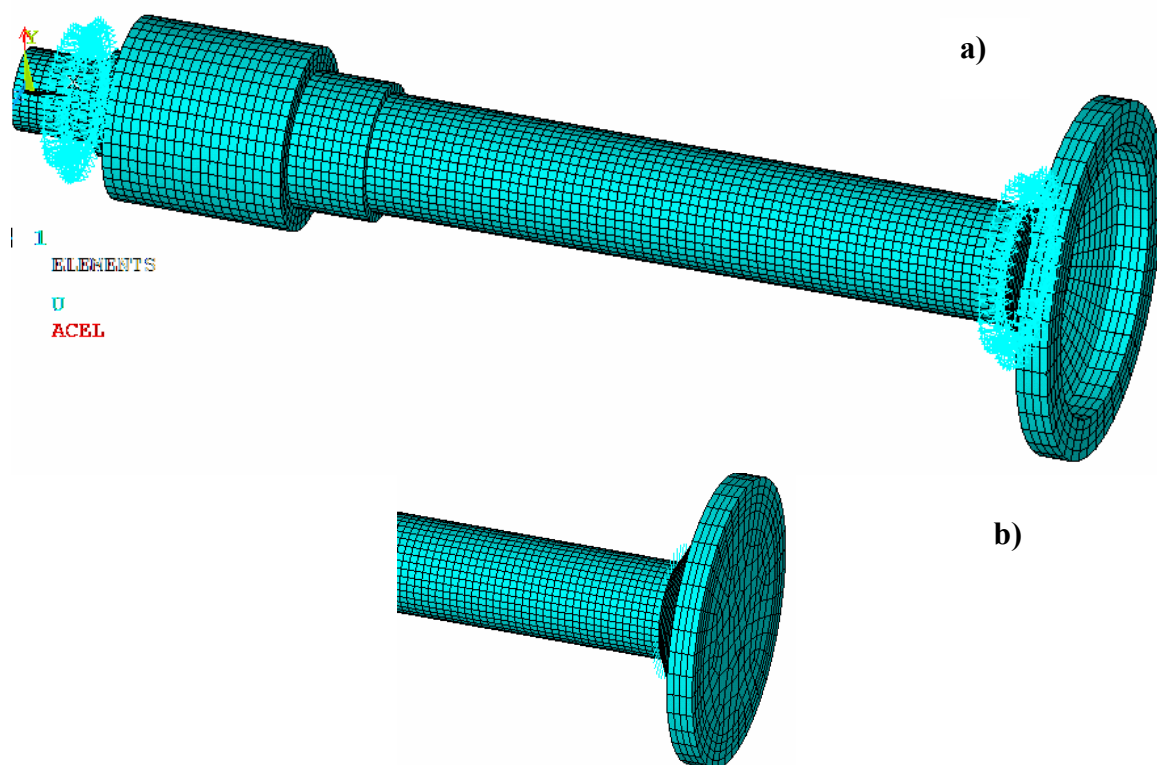
Při tvorbě výpočtového modelu byla využita rotační symetrie součástí. Plocha rotační symetrie zjednodušeného geometrického modelu zobrazeného na obr.3 a), byla vhodně rozdělena rovinnými prvky MESH200. Rotací těchto prvků kolem osy rotace byla vytvořena pravidelná síť šestistěnnů prvky typu SOLID185.

Z důvodu potřeb další analýzy, je výpočtový model A upraven tak, že je přidáno druhé pomocné ložisko. Jeho tuhost zavedeme stejnou jako u ložiska A. Základní rozměry jsou uvedeny na obr.9. Obě ložiska jsou modelovány podle kapitoly 2.3.1. Konečno – prvkový model je zobrazen na obr.10 a).



. Obr. 9 Základní rozměry výpočtového modelu A

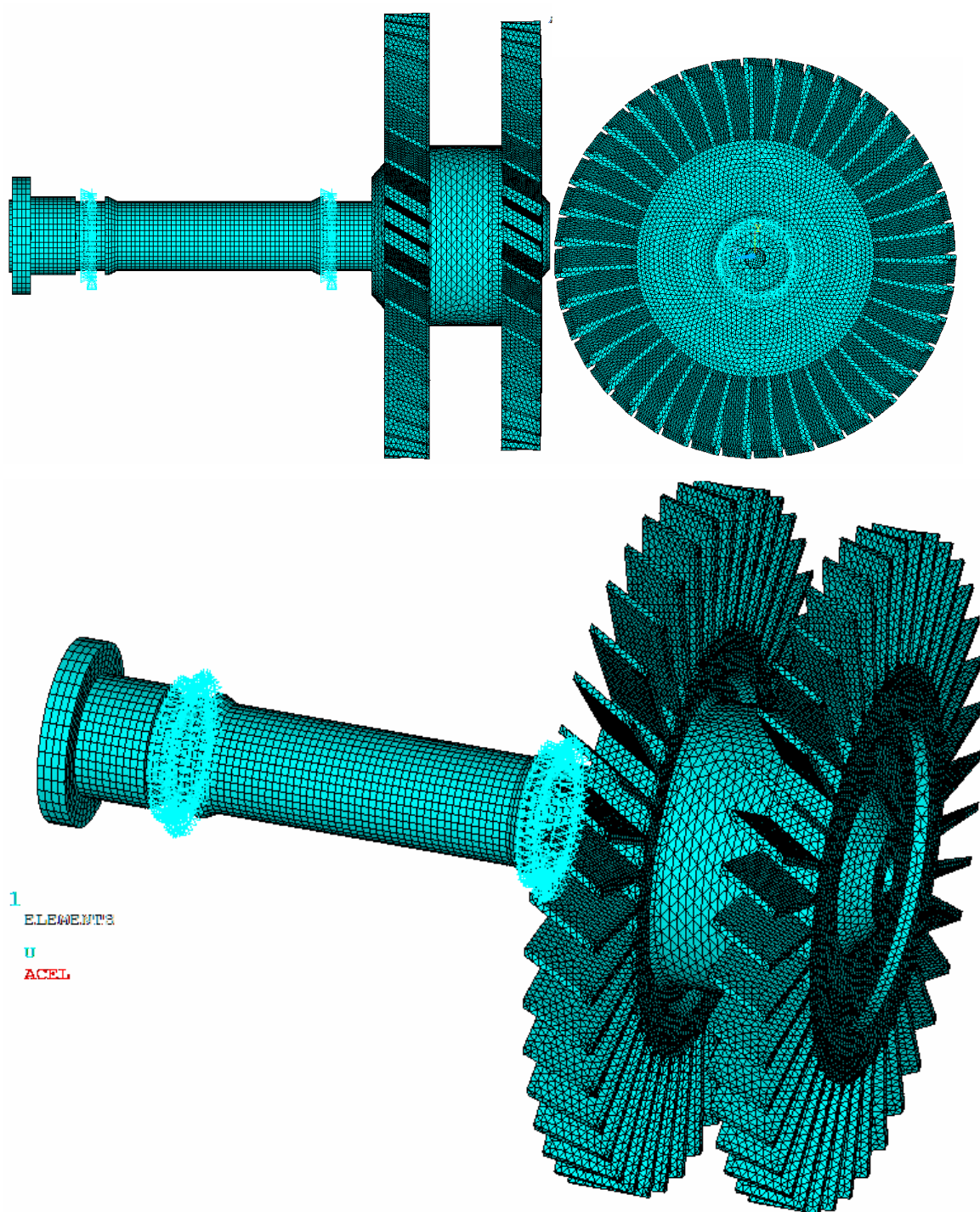
Pro případ statické analýzy je třeba zabránit rotaci kolem osy rotační symetrie. Toho je docíleno pomocí nehmotné kruhové desky vytvořené z prvků SHELL63. V uzlu, který odpovídá místu pomyslného protnutí desky a osy rotace, je odebrán stupeň volnosti odpovídající rotaci kolem osy rotační symetrie tělesa. Konečno – prvkový model s pomocnou nehmotnou deskou je zobrazen na obr. 10 b).



. Obr. 10 Konečno – prvkový model A

2.3.3 Modelová soustava B

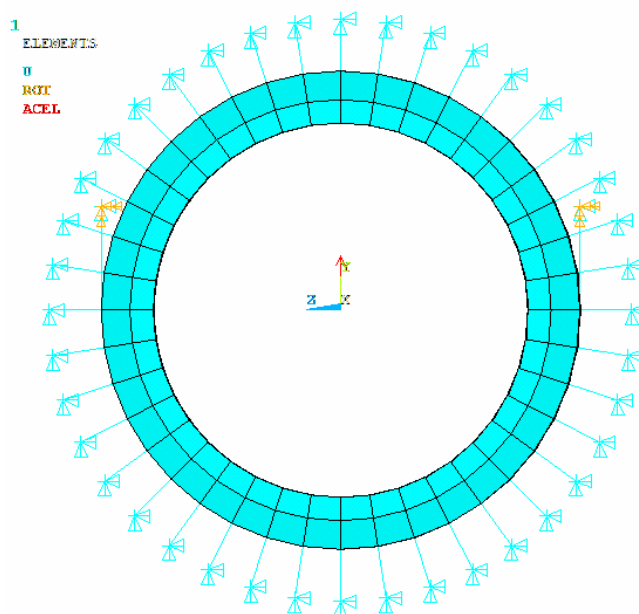
Při tvorbě výpočtového modelu byla využita rotační symetrie viz. kapitola 2.3.2. Výjimkou je složitější geometrie lopatkových kol, která je vytvořena čtyř – uzlovou variantou prvku SOLID185. Celý konečno – prvkový model je zobrazen na obr.11.



. Obr. 11 Konečno – prvkový model B

Ložiska jsou modelována podle základních rozměrů, které jsou uvedeny na obr.1. V případě výpočtu statické analýzy je třeba zabránit rotaci kolem osy rotační symetrie. U modelové soustavy **B** je tohoto docíleno přidáním dvou prvků COMBIN14, proti směru působení gravitačního zrychlení, jehož jeden uzel je společný s okrajem hřídele v místě

levé podpory. Krajním uzlům obou pomocných prvků jsou odebrány všechny stupně volnosti viz. obr. 12. Zvýšení tuhosti soustavy je zanedbatelné.



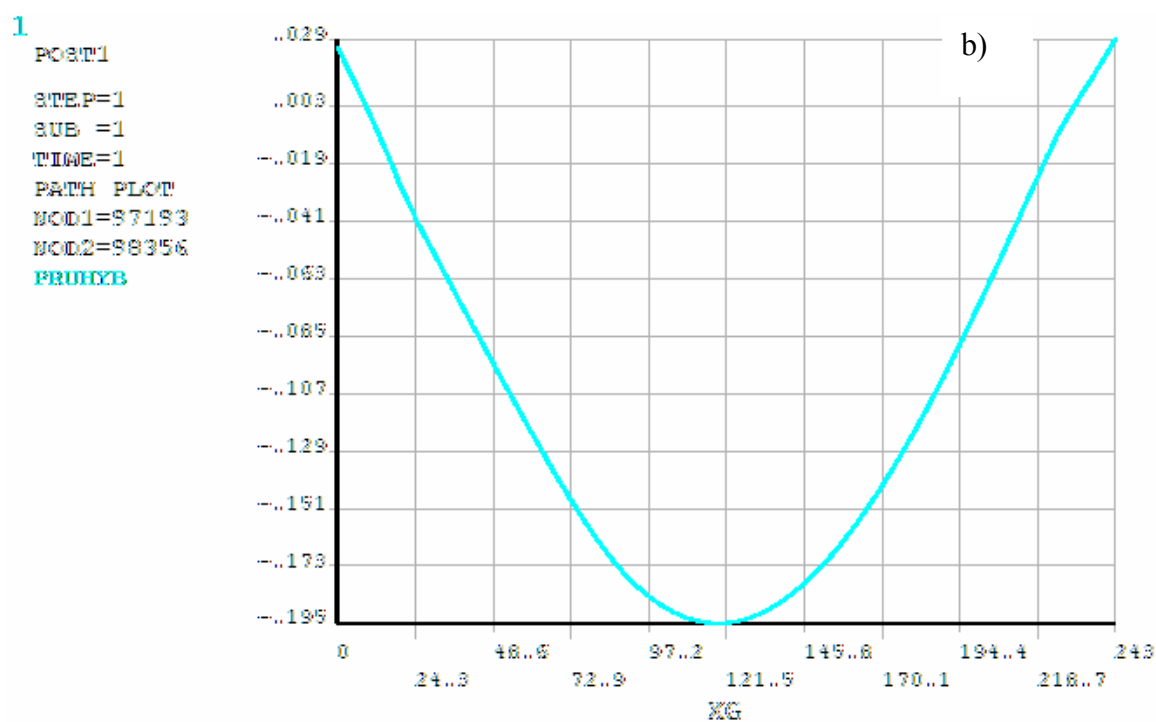
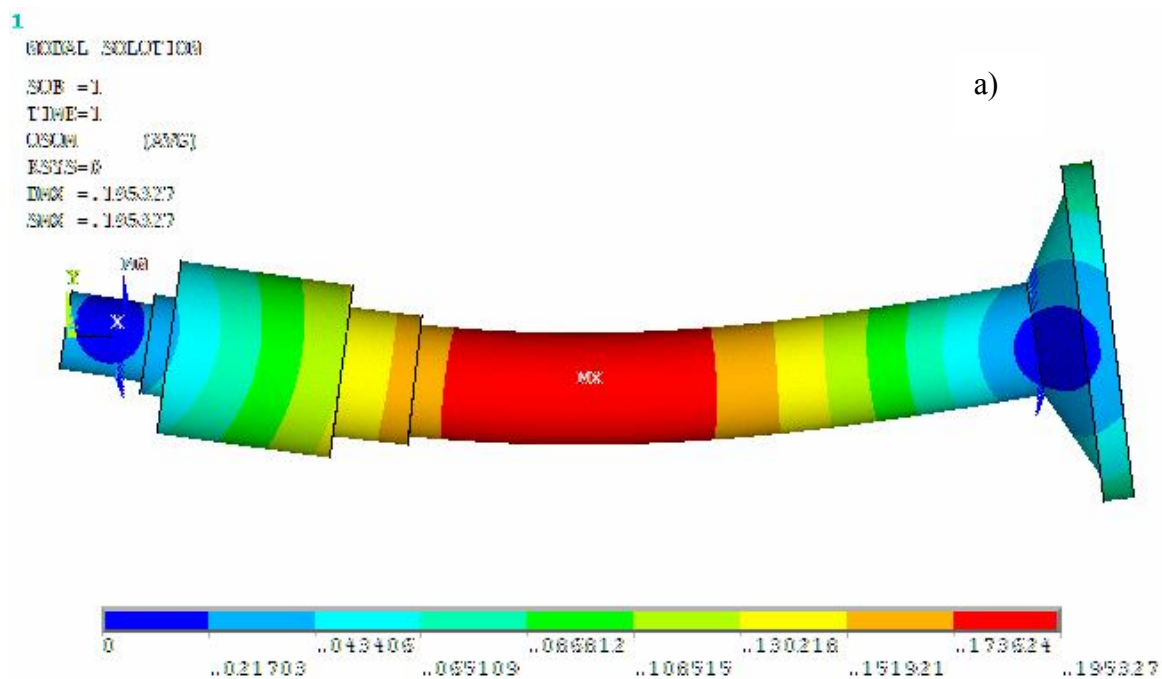
Obr. 12 Detail levého ložiska

2.4 Statická a modální analýza

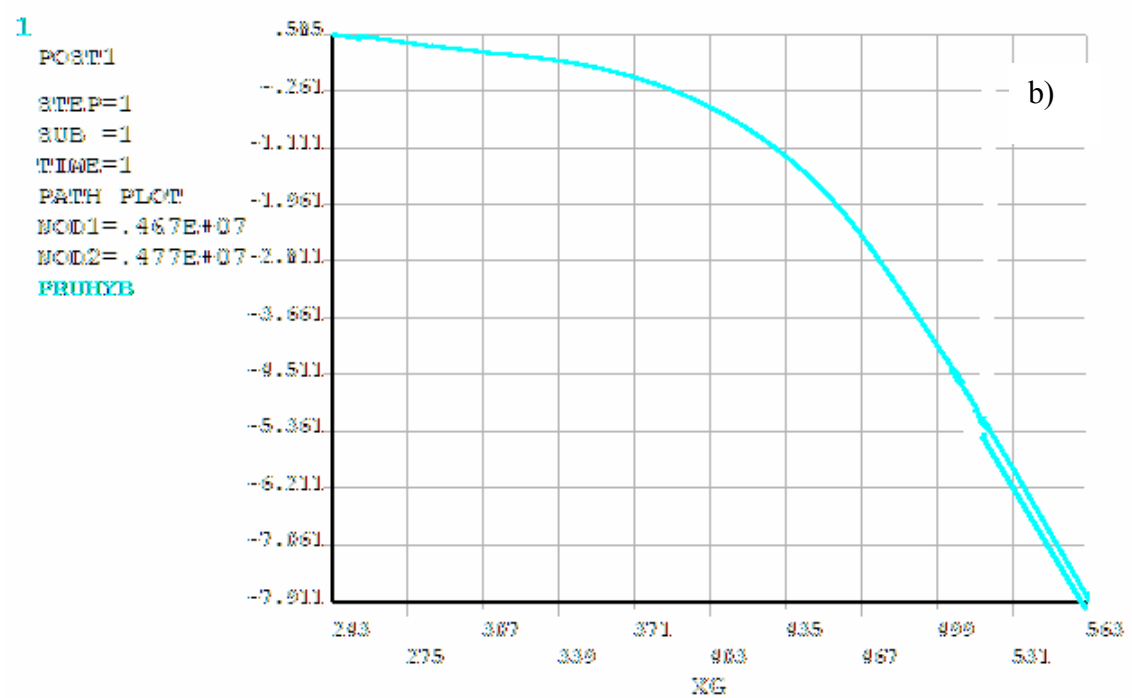
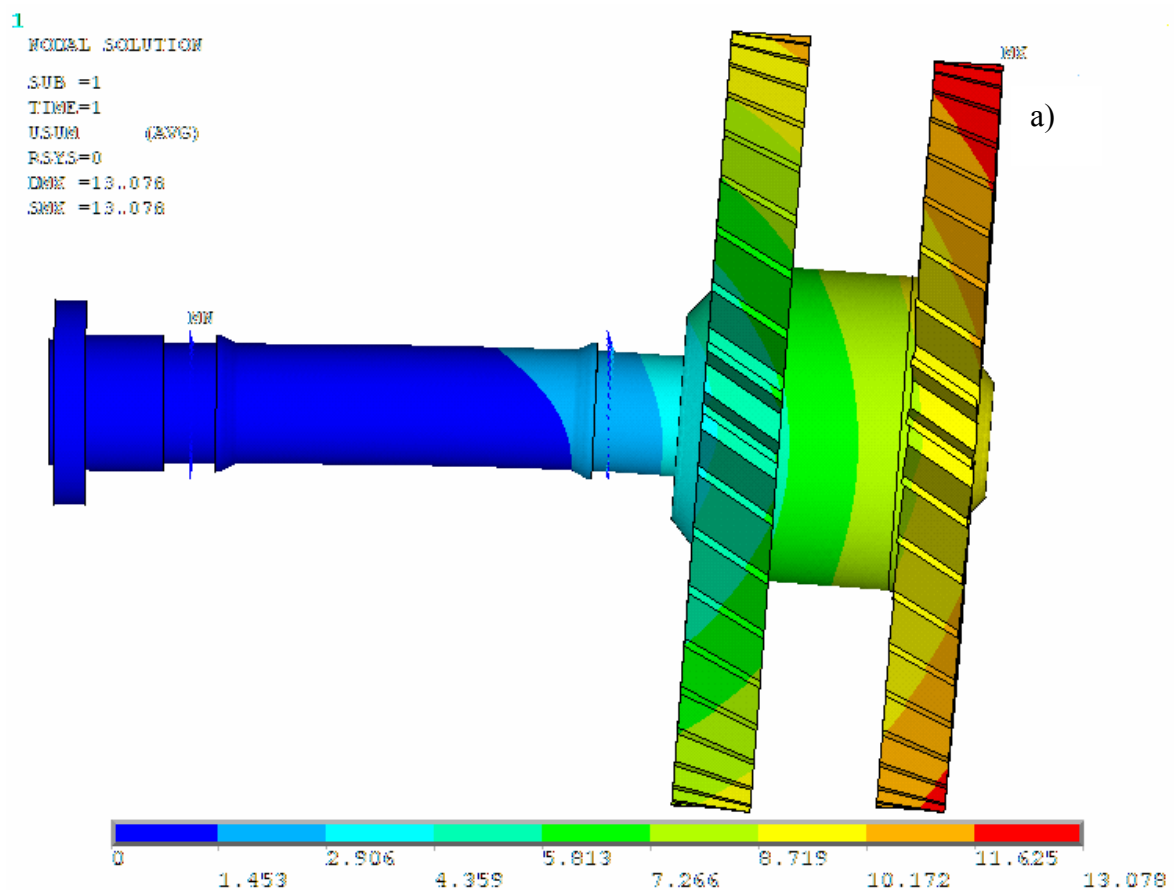
2.4.1 Statická analýza

Byl proveden výpočet deformace od zatížení vlastní tíhou. Vzhledem k malým deformacím rotoru byla hodnota gravitačního zrychlení zadána větší, aby byla deformace rotoru více patrná. Z tohoto důvodu bylo gravitační zrychlení ve svislém směru zadáno jako fiktivní zrychlení o velikosti $g = 9800 \text{ m.s}^{-2}$.

Celková deformace v $[mm]$ konečno – prvkového modelu **A**, je zobrazena na obr. 13 a). Na obr. 13 b) je znázorněn průhyb střednice této části rotoru ve směru působení gravitačního zrychlení v závislosti na přírůstku souřadnice ve směru osy rotace. Celková deformace konečno – prvkového modelu **B**, je zobrazena na obr. 14 a), průhyb jeho střednice ve směru působení gravitačního zrychlení v závislosti na přírůstku souřadnice ve směru osy rotace je zobrazen na obr. 14 b).



Obr. 13 Deformace modelu A a) celková deformace [mm] b) průhyb střednice [mm]



Obr. 14 Deformace modelu **B** a) celková deformace [mm] b) průhyb střednice [mm]

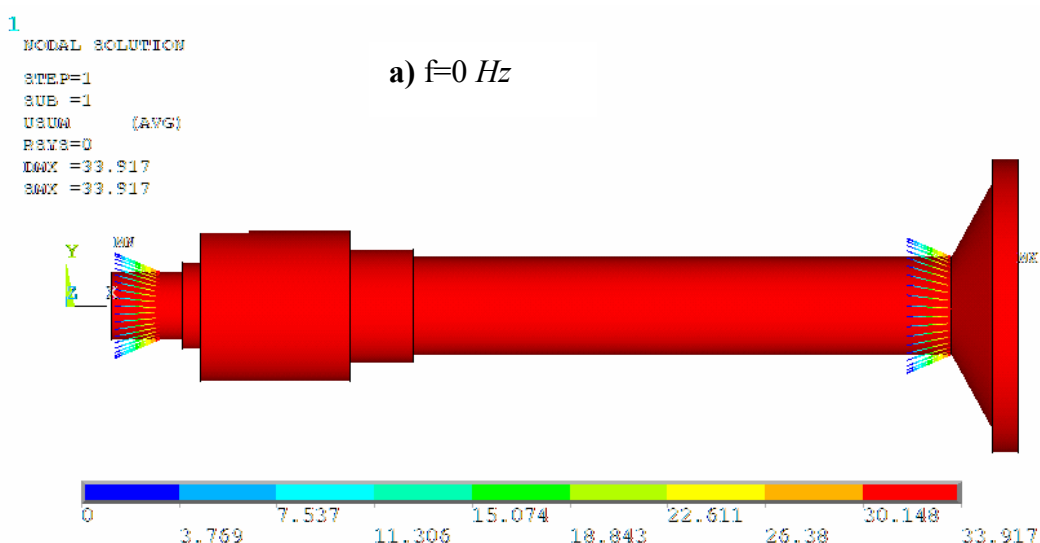
2.4.2 Modální analýza

U obou prostorových výpočtových modelů byla provedena modální analýza. Bylo vypočteno prvních čtrnáct vlastních frekvencí a příslušných vlastních tvarů. Pro naladění prutových modelů využijeme první čtyři dvojice ohybových vlastních frekvencí. Zbylé vypočtené vlastní frekvence nejsou pro další výpočet potřebné.

Vypočtené vlastní frekvence, pro oba prostorové výpočtové modely, jsou uvedeny v tab.7. Ohybové vlastní frekvence jsou zvýrazněny šedě. Ze dvojice ohybových vlastních tvarů je z důvodu tvarové podobnosti zobrazen vždy pouze jeden z nich. Vlastní tvary modelu **A** jsou zobrazeny na obr. 15. Ohybové vlastní tvary jsou zobrazeny na obr. 15 c), e), f), i). Vlastní tvary modelu **B** jsou zobrazeny na obr. 16. Ohybové vlastní tvary jsou zobrazeny na obr. 16 c), d), e), g).

Tab. 7: Vypočtené vlastní frekvence prostorových modelů f [Hz]

pořadí	1	2	3	4	5	6	7
model A	0	0	1236	1236	2716	2850	2850
model B	0	0	142	142	498	498	1273
pořadí	8	9	10	11	12	13	14
model A	4624	4624	4666	4666	6347	7967	7967
model B	1273	1886	2367	2367	2835	3225	3225



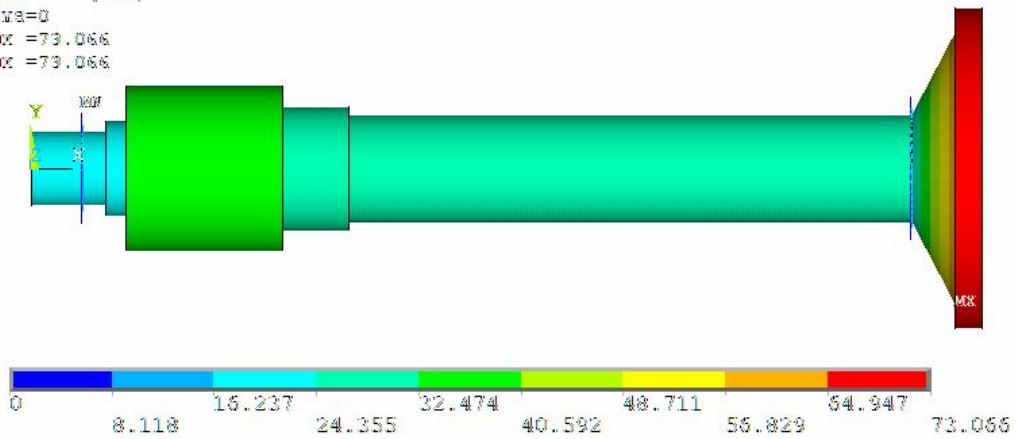
1

MODAL SOLUTION

```

STEP=1
SUB =2
FREQ=.00135%
USUM (AVG)
RSVS=0
MAX =73.066
MIN =73.066

```

b) $f=0 \text{ Hz}$ 

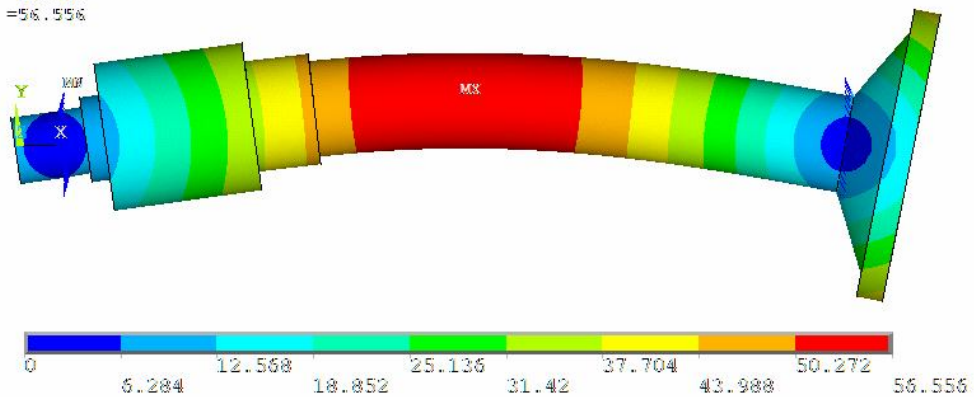
1

MODAL SOLUTION

```

STEP=1
SUB =4
FREQ=123%
USUM (AVG)
RSVS=0
MAX =56.556
MIN =56.556

```

c) $f=1236 \text{ Hz}$ 

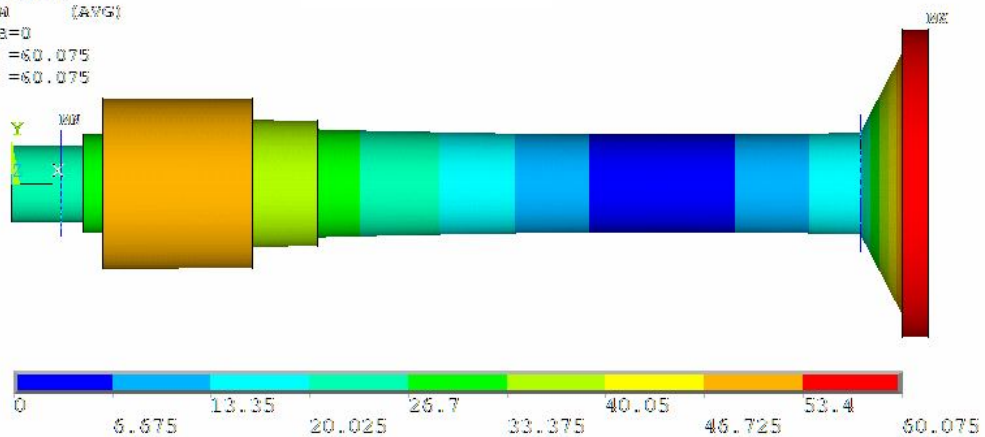
1

MODAL SOLUTION

```

STEP=1
SUB =5
FREQ=271%
USUM (AVG)
RSVS=0
MAX =60.075
MIN =60.075

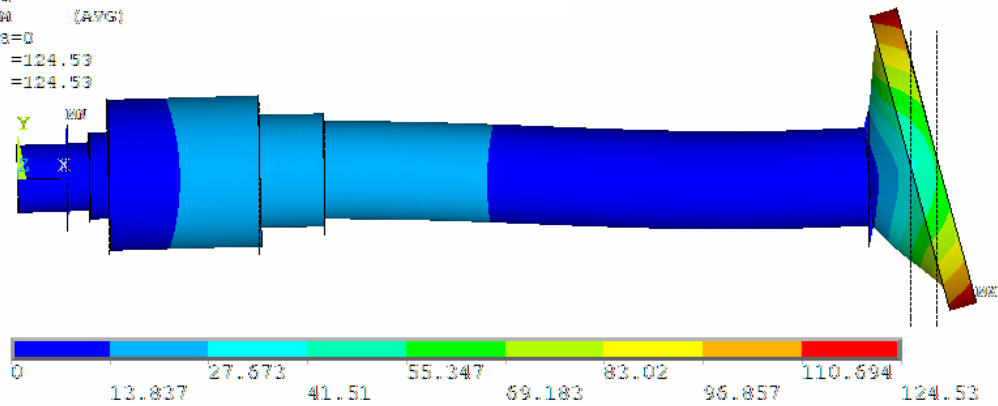
```

d) $f=2716 \text{ Hz}$ 

1
MODAL SOLUTION

STEP=1
SUB =7
FREQ=2850
USUM (AVG)
RMS=0
MAX =124.53
MIN =124.53

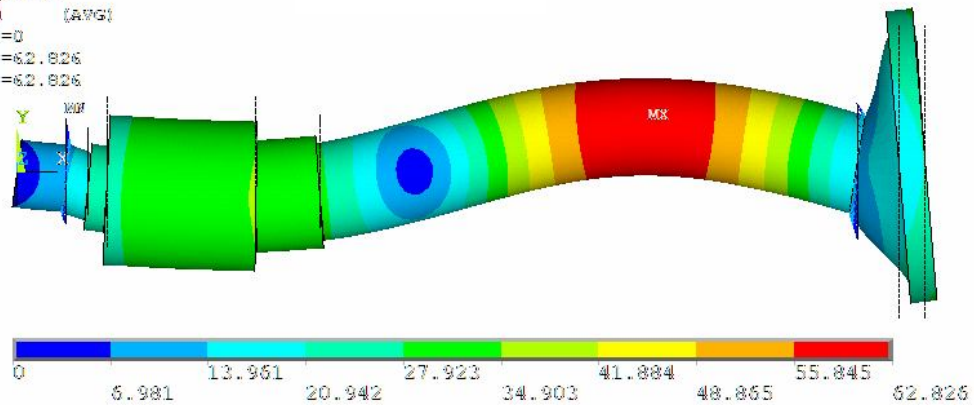
e) $f=2850 \text{ Hz}$



1
MODAL SOLUTION

STEP=1
SUB =8
FREQ=4624
USUM (AVG)
RMS=0
MAX =62.826
MIN =62.826

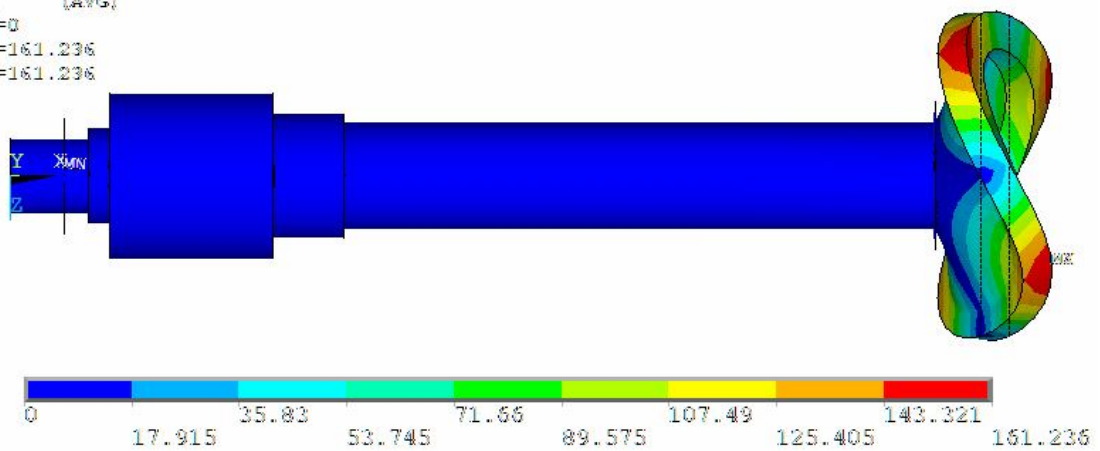
f) $f=4624 \text{ Hz}$



1
MODAL SOLUTION

STEP=1
SUB =10
FREQ=4666
USUM (AVG)
RMS=0
MAX =161.236
MIN =161.236

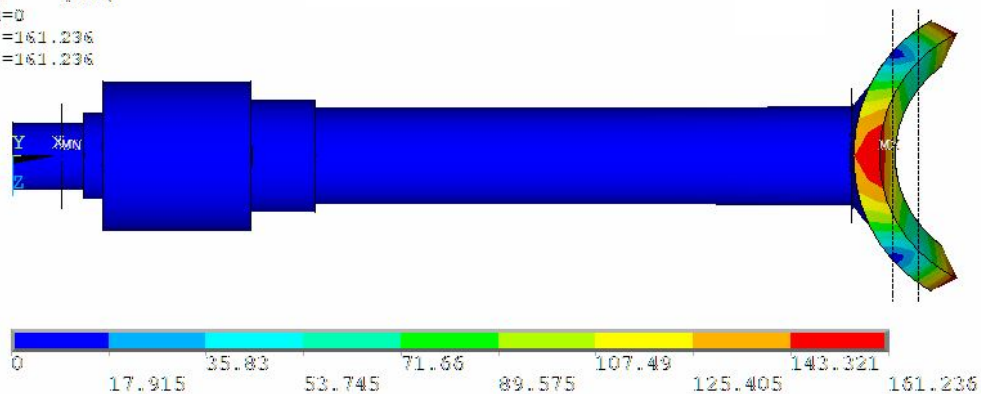
g) $f=4666 \text{ Hz}$



1
MODAL SOLUTION

STEP=1
SUB =11
FREQ=4666
USUM (AVG)
RMS=0
MAX =161.236
MIN =161.236

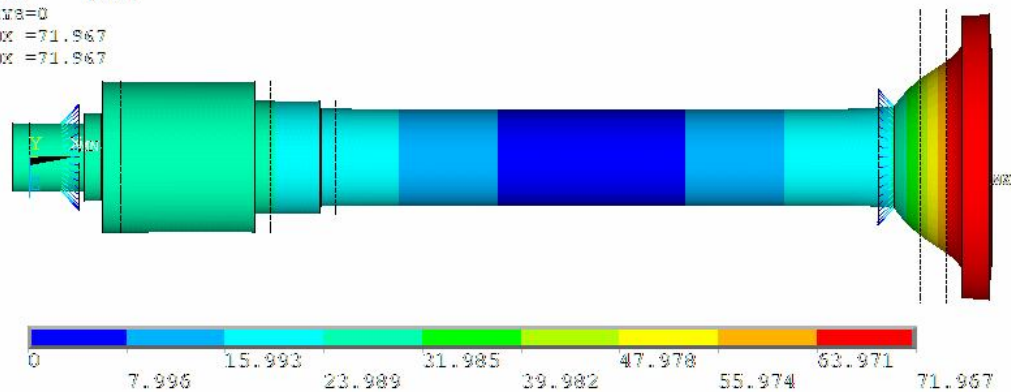
h) $f=4666 \text{ Hz}$



1
MODAL SOLUTION

STEP=1
SUB =12
FREQ=6347
USUM (AVG)
RMS=0
MAX =71.967
MIN =71.967

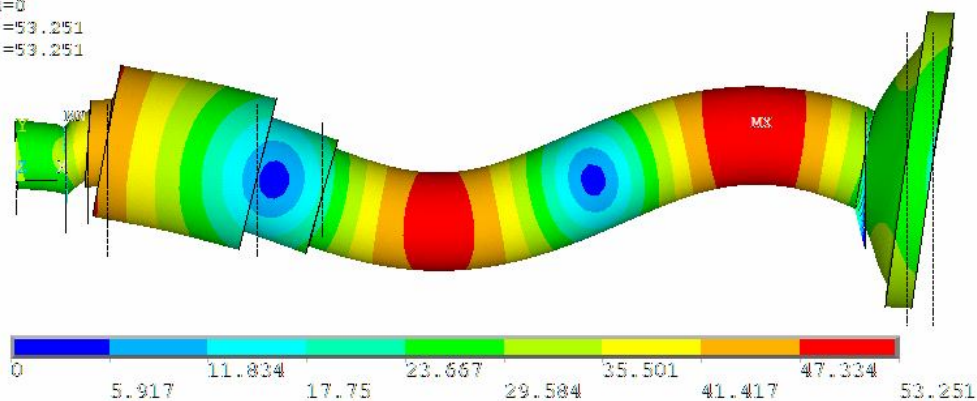
ch) $f=6347 \text{ Hz}$



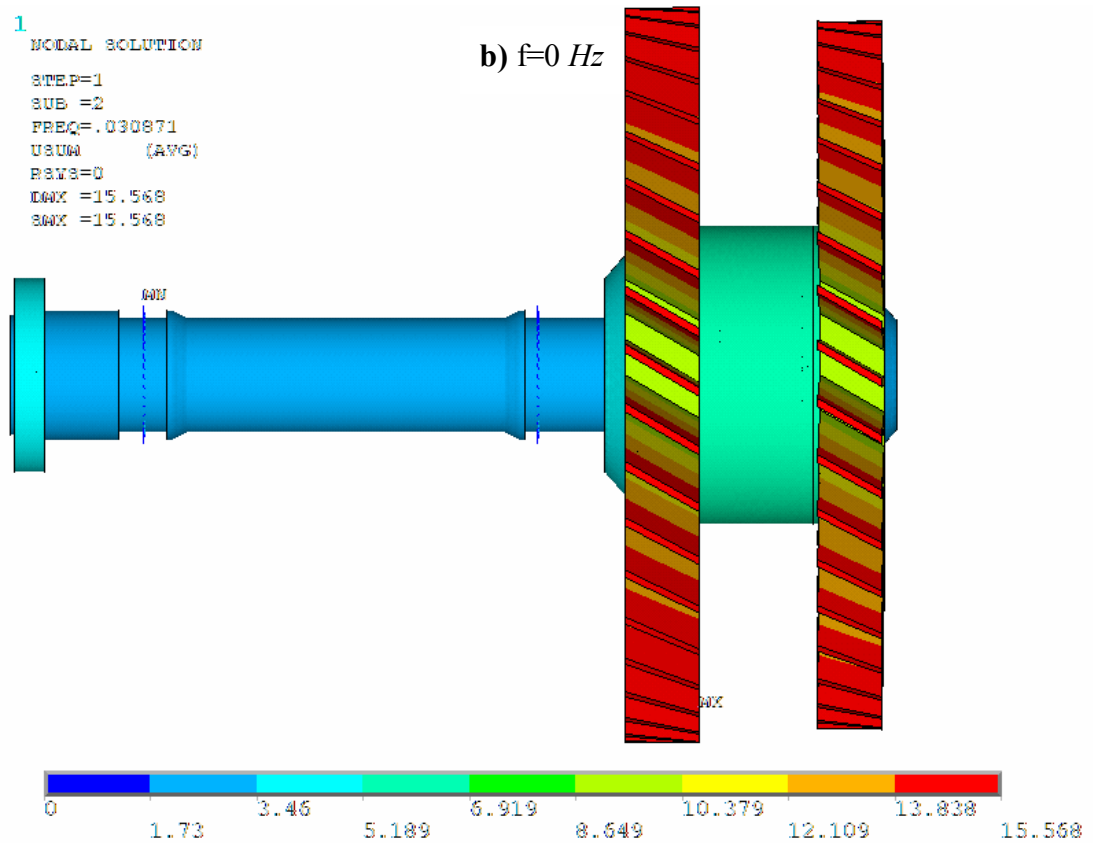
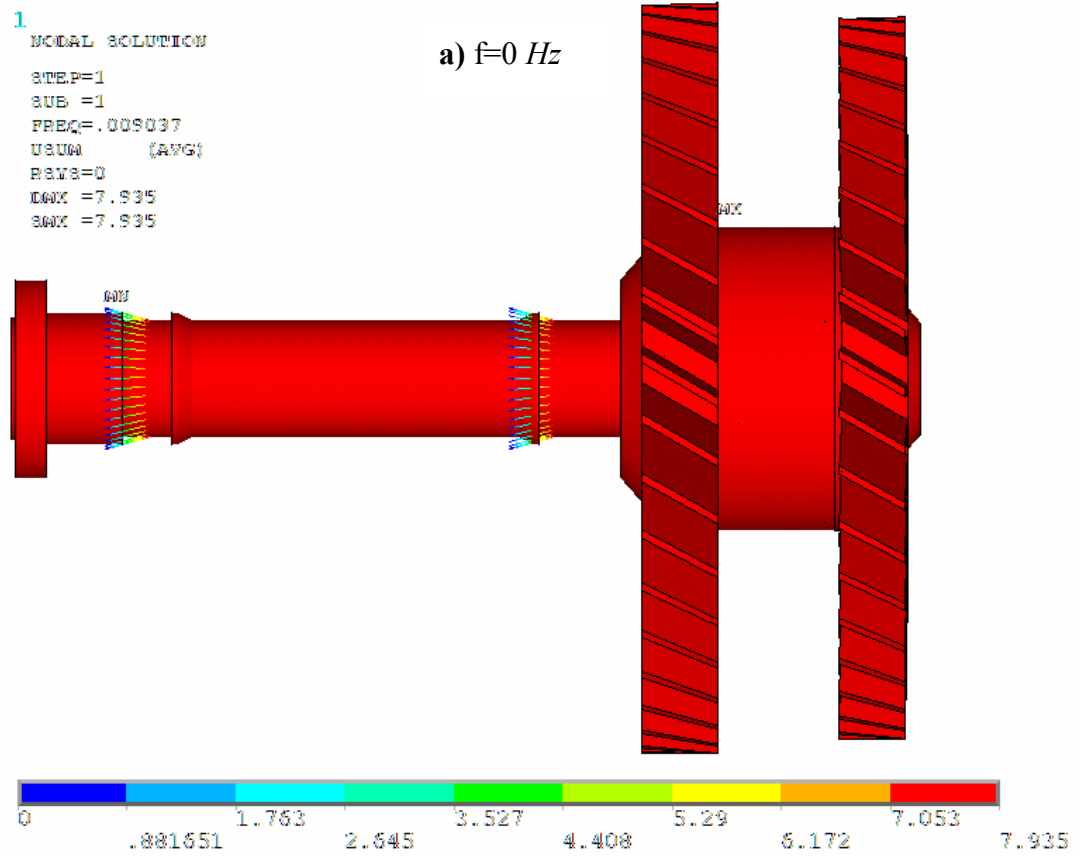
1
MODAL SOLUTION

STEP=1
SUB =14
FREQ=7967
USUM (AVG)
RMS=0
MAX =53.251
MIN =53.251

i) $f=7967 \text{ Hz}$



Obr. 15 Vlastní tvary konečno – prvkového modelu A



1

NODAL SOLUTION

STEP=1

SUB =3

FREQ=146.159

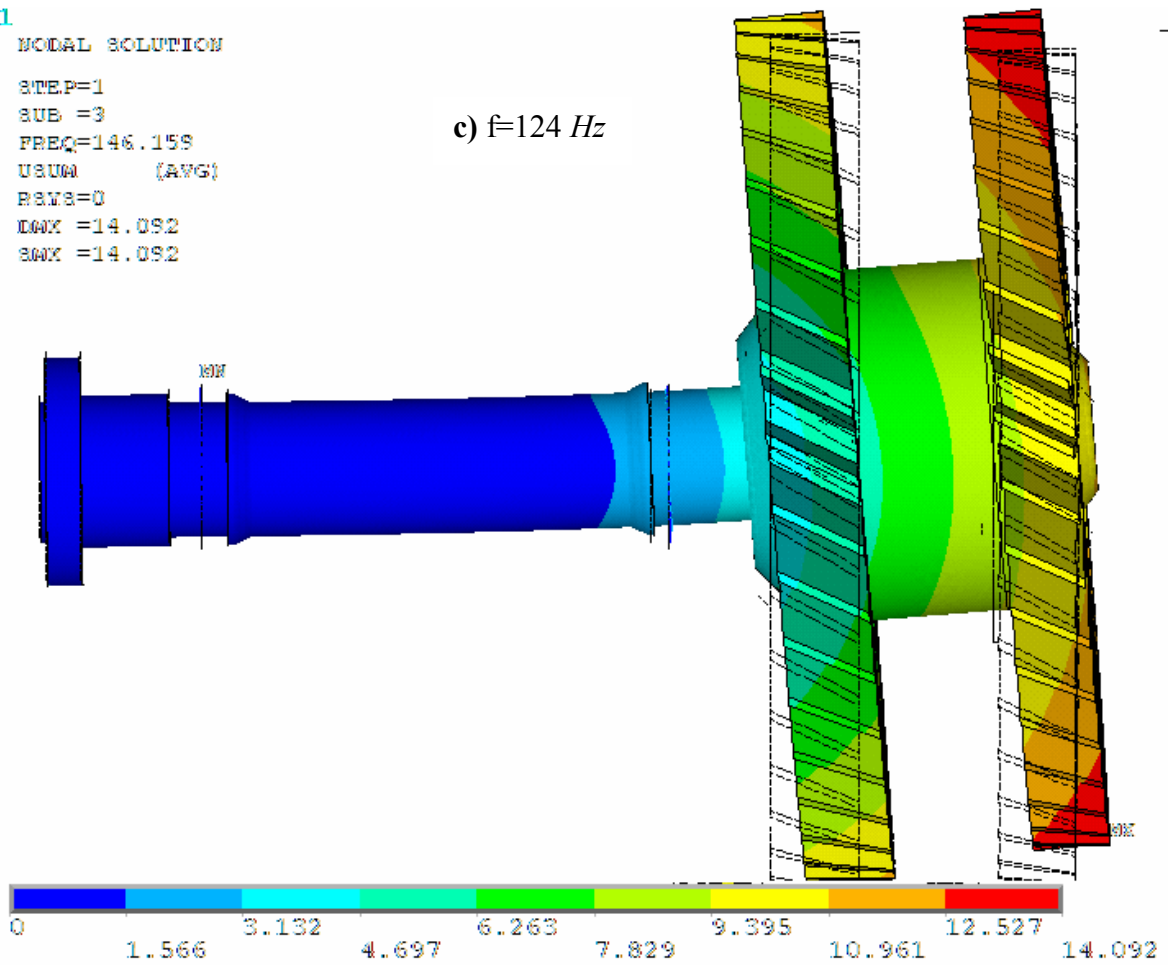
USUM (AVG)

RSYS=0

DMX =14.092

SMX =14.092

c) $f=124 \text{ Hz}$



1

NODAL SOLUTION

STEP=1

SUB =5

FREQ=497.563

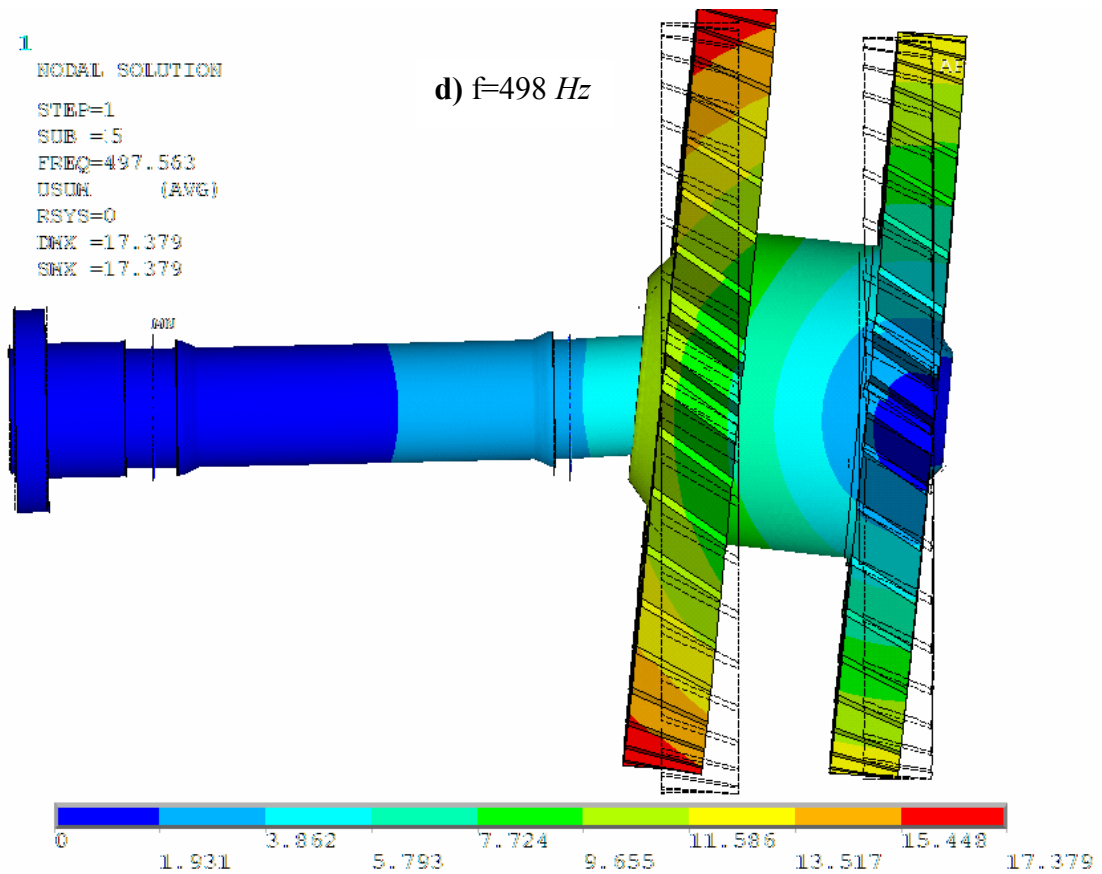
USUM (AVG)

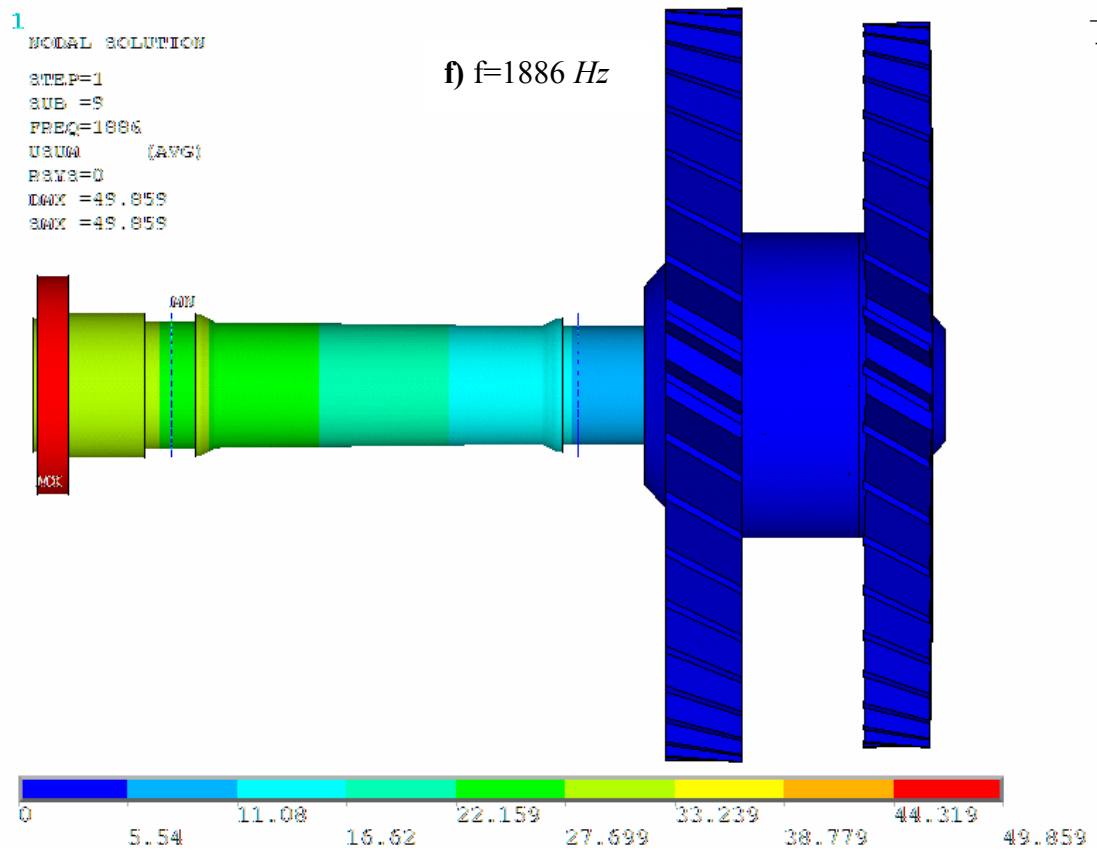
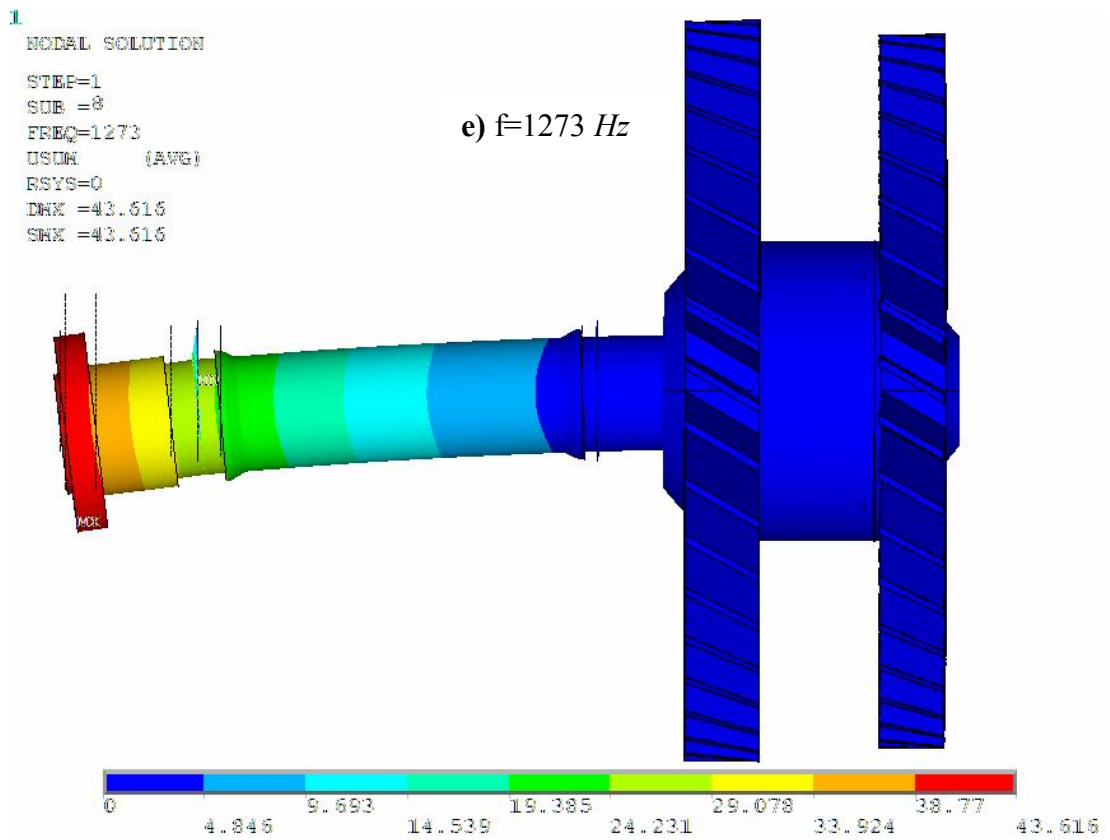
RSYS=0

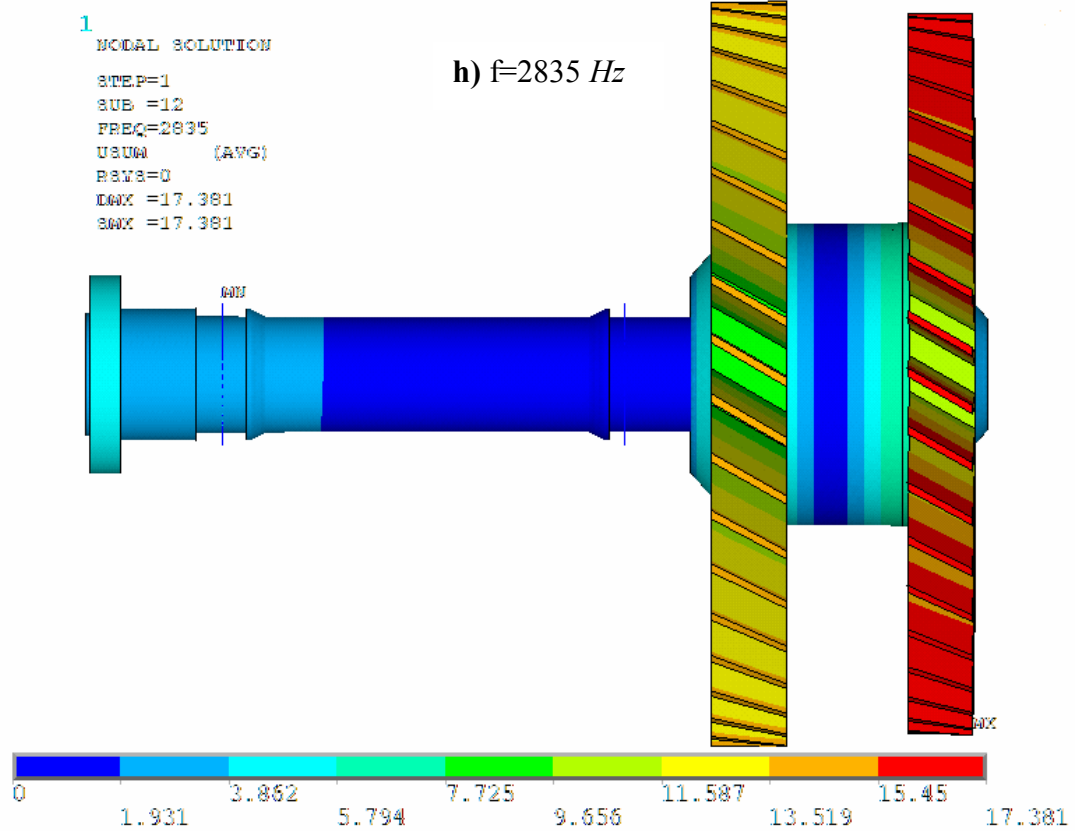
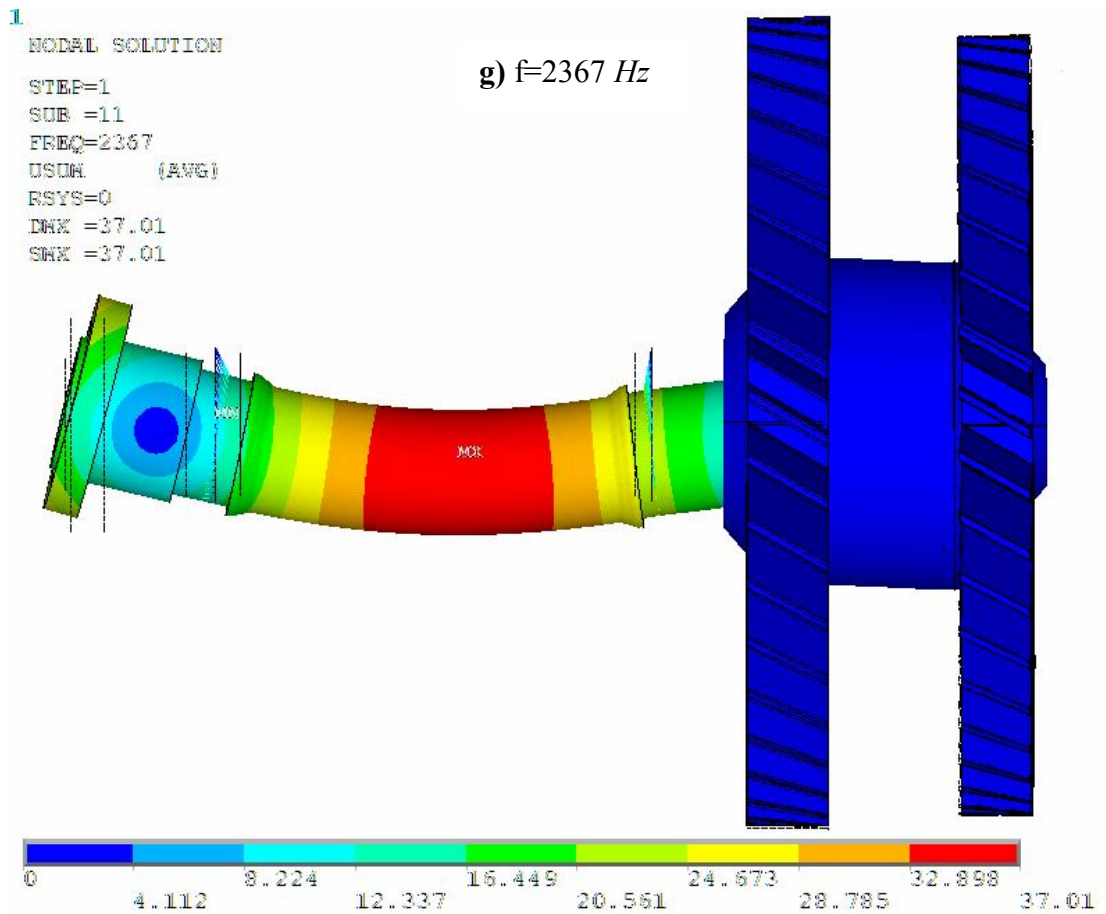
DMX =17.379

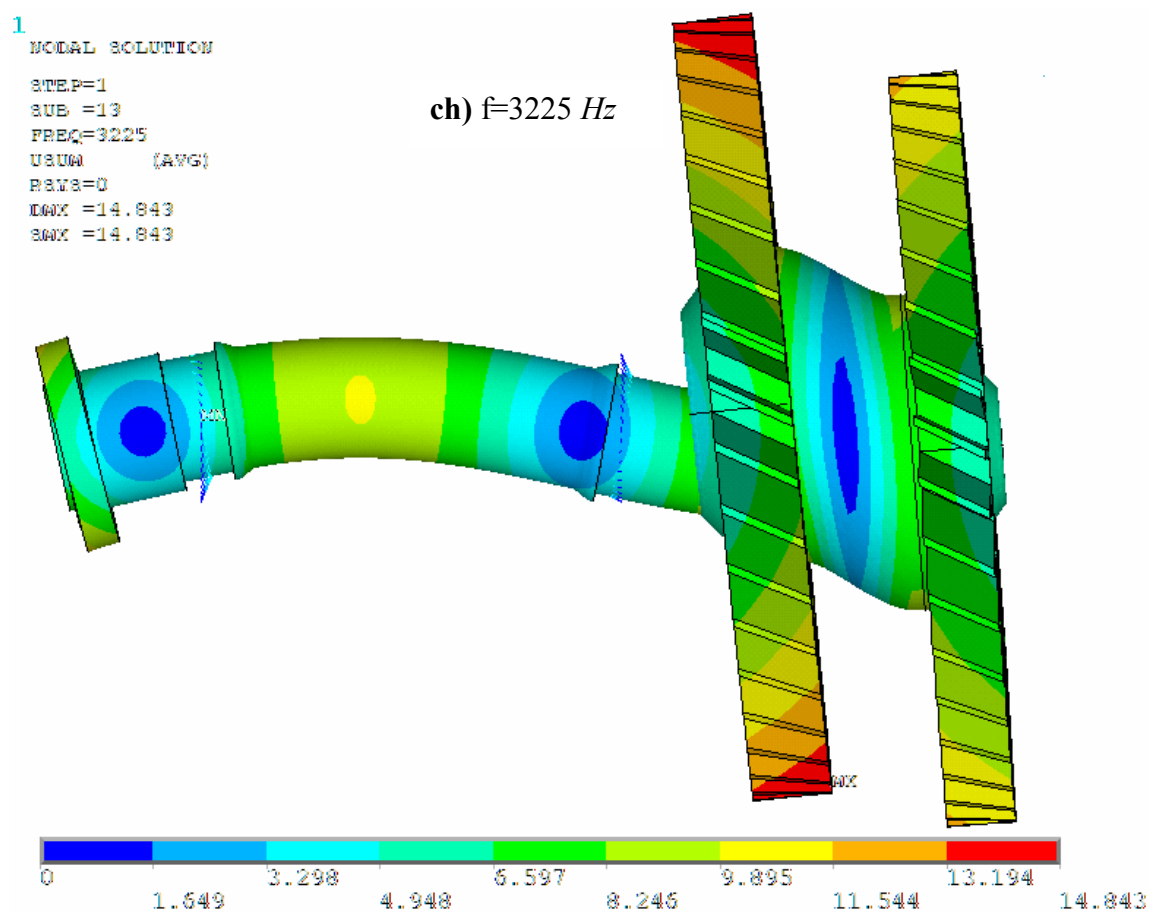
SMX =17.379

d) $f=498 \text{ Hz}$









Obr. 16 Vlastní tvary konečno – prvkového modelu **B**

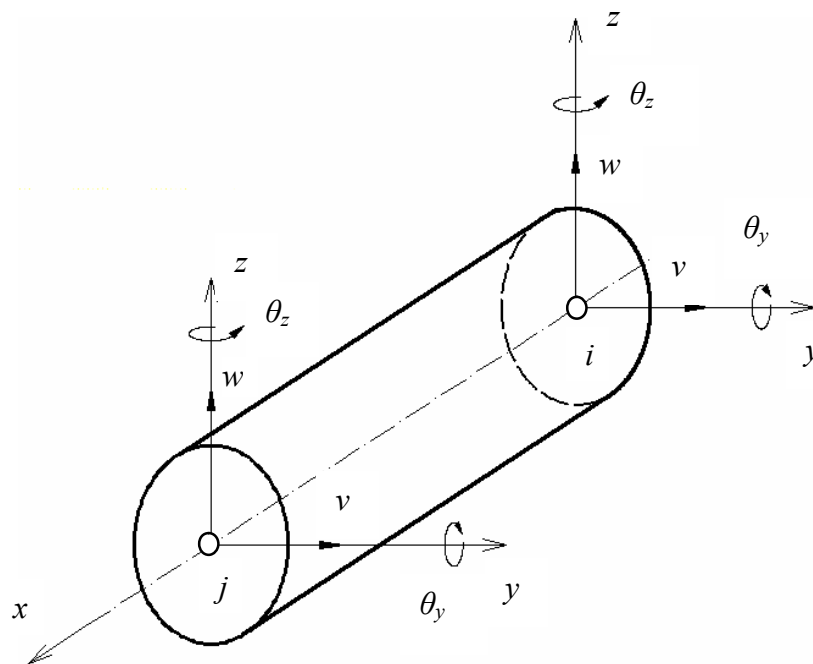
3. Prutové modely

K sestavení 1D výpočtového modelu byla použita metoda konečných prvků. Jedná se o metodu diskretizační. Při modelování vycházíme z rozměrů daných výkresem. Celý rotor je opět rozdělen v místě zubové spojky na dva celky způsobem, který byl popsán v kapitole 2.1. Levou část nazvěme modelová soustava **A**, pravou část modelová soustava **B**. Obě modelové soustavy jsou vhodně diskretizovány.

Použitým prvkem je hřídelový prvek se dvěma uzly i a j . V každém z uzlů jsou celkem čtyři stupně volnosti: posuv v ose y - v , posuv v ose z - w , rotace kolem osy y - θ_y a kolem osy z - θ_z . Tento prvek je zobrazen na obr. 17. Jeho tvarová funkce má rovnici:

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 \\ z &= b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + b_3 \cdot x^3 \end{aligned} \quad (20)$$

kde $a_{0,1,2,3}$ $b_{0,1,2,3}$ jsou koeficienty tvarové funkce.



Obr. 17 Hřídelový prvek

Jednotlivé prvky každého výpočtového modelu jsou charakterizovány třemi geometrickými parametry. Pro každý prvek byl zadán vnější a vnitřní průměr hřídele a dále délka prvku. Každému prvu byly přiřazeny materiálové konstanty. Pro každý prvek byl z vnějšího a vnitřního průměru daného prvku vypočten kvadratický moment plochy

průřezu. Dále byly pro jednotlivé prvky sestaveny matice tuhosti \mathbf{K}_e , hmotnosti \mathbf{M}_e , tlumení \mathbf{B}_e , cirkulační matice \mathbf{K}_{Ce} a matice gyroskopických účinků \mathbf{G}_e (dodatek D1) [4], z nichž byly sestaveny globální matice tuhosti \mathbf{K} , hmotnosti \mathbf{M} , tlumení \mathbf{B} , gyroskopických účinků \mathbf{G} a globální cirkulační matice \mathbf{K}_C .

Výpočtové modely jsou tvořeny z jednoho izotropního materiálu, kterým je ocel. Materiálovými vlastnostmi jsou Youngův modul pružnosti v tahu a měrná hmotnost materiálu, jejichž hodnoty jsou uvedeny v tab. 1.

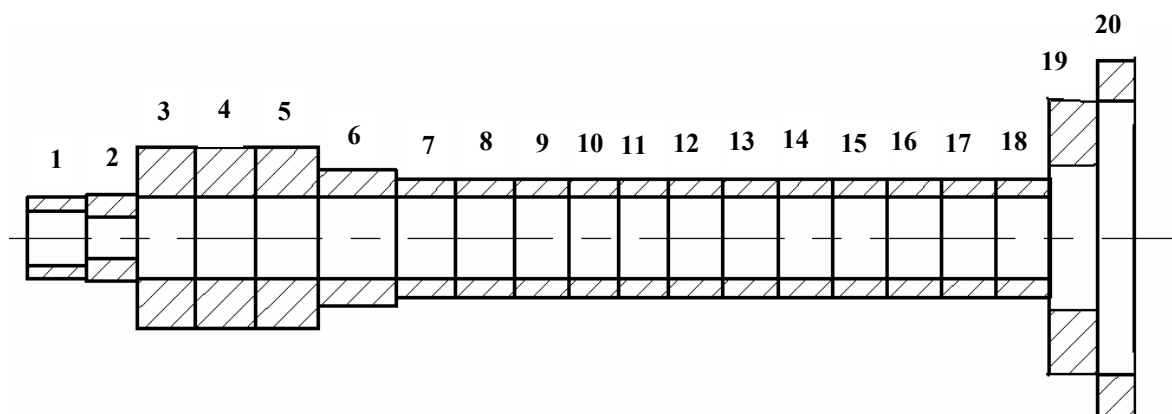
Ložiska jsou ve výpočtových modelech uvážena jako izotropní bodové podpěry, přidáním matice tuhosti ložiska do příslušného uzlu. Matice tuhosti izotropního ložiska je uvedena v dodatku D3.

3.1 Prutový model A

Výpočtový model A má dvě konstrukční varianty. Pro naladění parametrů prutového modelu pomocí statické a modální analýzy byla použita konstrukční varianta levé části rotoru, která je uložena ve dvou izotropních ložiscích, jejichž poloha je zobrazena na obr. 9. Druhou konstrukční variantou je původní uložení v jednom ložisku viz. obr. 1. Tato konstrukční varianta je použita v dalších dynamických analýzách.

3.1.1 Diskretizace modelu A

Výpočtový model A je tvořen dvaceti prvky s dvacetijedním uzlem. Tento výpočtový model má celkem stočtyři stupňů volnosti. Číslování prvků prutového modelu A v reálných rozměrech je zobrazeno na obr. 18.

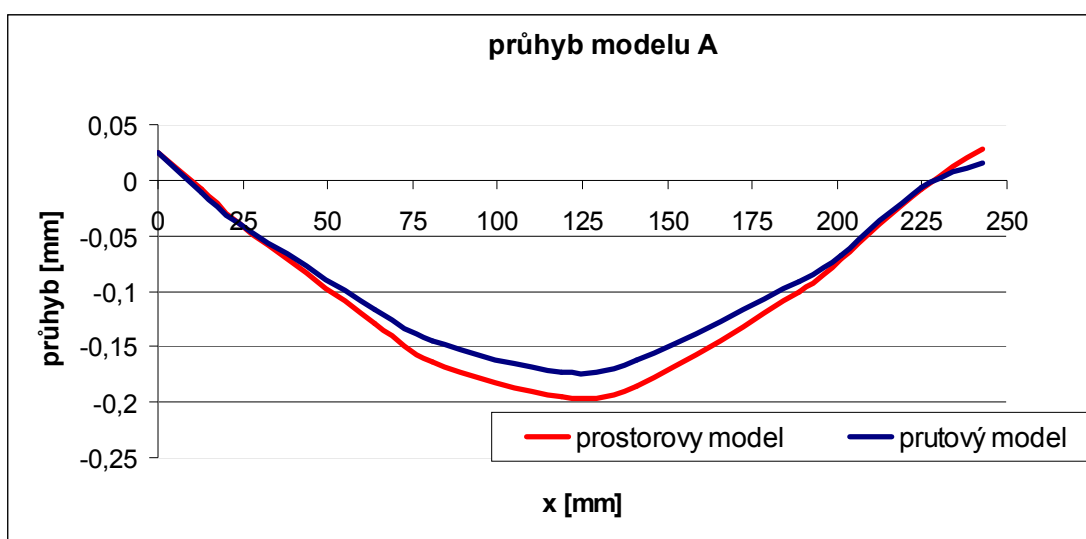


Obr. 18 Číslování prvků modelu A

3.1.2 Naladění parametrů prutového modelu A pomocí statické a modální analýzy

U obou analýz byl výpočtový model doplněn o pomocné ložisko podle obr. 9. Nejdříve byla provedena statická analýza. Výpočtový model byl zatížen vlastní tíhou s fiktivní hodnotou gravitačního zrychlení $g=9810 \text{ m.s}^{-1}$.

Byl vypočten průhyb od zatížení vlastní tíhou, který byl porovnán s již vypočteným průhybem hřídele modelované jako prostorové těleso v kapitole 2.4.1. Tuhostní i modální vlastnosti některých hřídelových prvků byly pozměněny s ohledem na zachování jejich hmotnosti. Byly změněny průřezové parametry (vnější a vnitřní průměr) některých prvků tak, aby se průhyb prutového modelu přibližně shodoval s průhybem prostorového modelu. Výsledné srovnání naladěného modelu s prostorovým modelem je zobrazeno na obr. 19.



Obr. 19 Srovnání průhybů modelů A

Po vyladění prutového modelu A, byla provedena kontrolní modální analýza. Byly vypočteny čtyři dvojice vlastních ohybových frekvencí, které jsou uvedeny v tab. 8. Tyto byly srovnány s ohybovými vlastními frekvencemi prostorového modelu. Pro výpočet odchylky platí:

$$\Delta = \frac{|f_{3D} - f_{1D}|}{f_{3D}} \cdot 100[\%], \quad (21)$$

kde f_{3D} je ohybová vlastní frekvence pro prostorový model a f_{1D} je ohybová vlastní frekvence pro prutový model. Srovnání vlastních frekvencí prostorového a prutového modelu je uvedeno v tab. 8.

Tab. 8: Srovnání ohybových vlastních frekvencí

ohybová vlastní frekvence pro prostorový model f_{3D} [Hz]	ohybová vlastní frekvence pro prutový model f_{1D} [Hz]	odchylka Δ [%]
1235.7	1271	2.78
2849.5	3142	9.98
4624.0	4600	0.52
7966.8	7774	2.42

3.2 Prutový model B

Kotouče byly při diskretizaci modelu **B** do výpočtového modelu zahrnuty pomocí matice hmotnosti a matice gyroskopických účinků kotoučů (viz. dodatek **D2** dle [1]). Vlastnosti jednotlivých kotoučů jsou uvedeny v tab. 3.

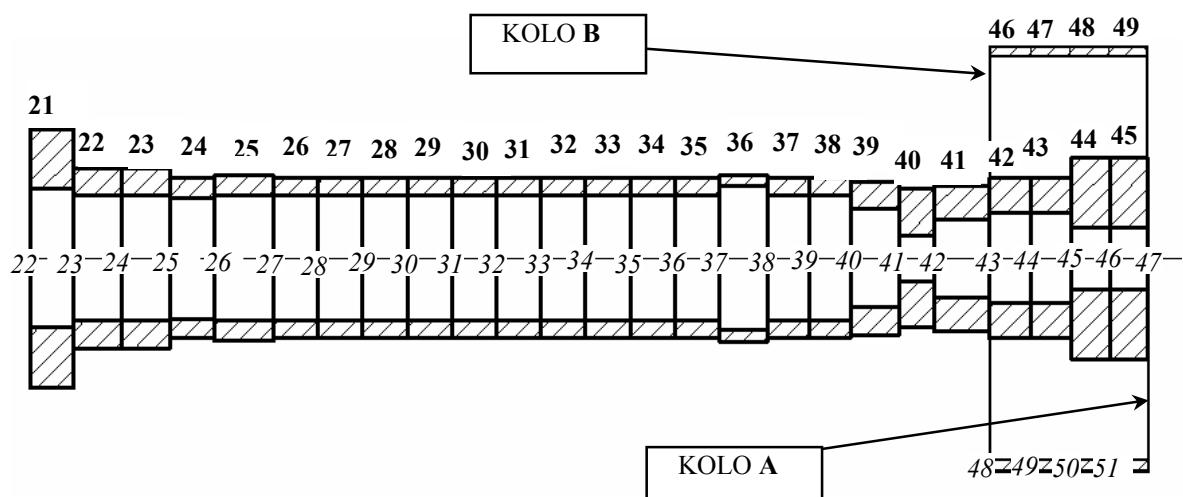
Jednotlivé matice kotoučů jsou připočteny ke globální maticí modelu **B** v příslušném uzlu. Tento způsob zahrnutí kotoučů do výpočtového modelu lze použít pro rotačně symetrické kotouče centricky kolmo a pevně nasazené na hřídeli v uzlu i , jehož střed hmotnosti je od uzlu i vzdálen o a viz. tab. 9.

Tab. 9: Vzdálenost středu hmotnosti od uzlu i

parametr	kolo A	kolo B
a – vzdálenost středu hmotnosti od uzlu i [m]	0,02605	0,01292

3.2.1 Diskretizace modelu B

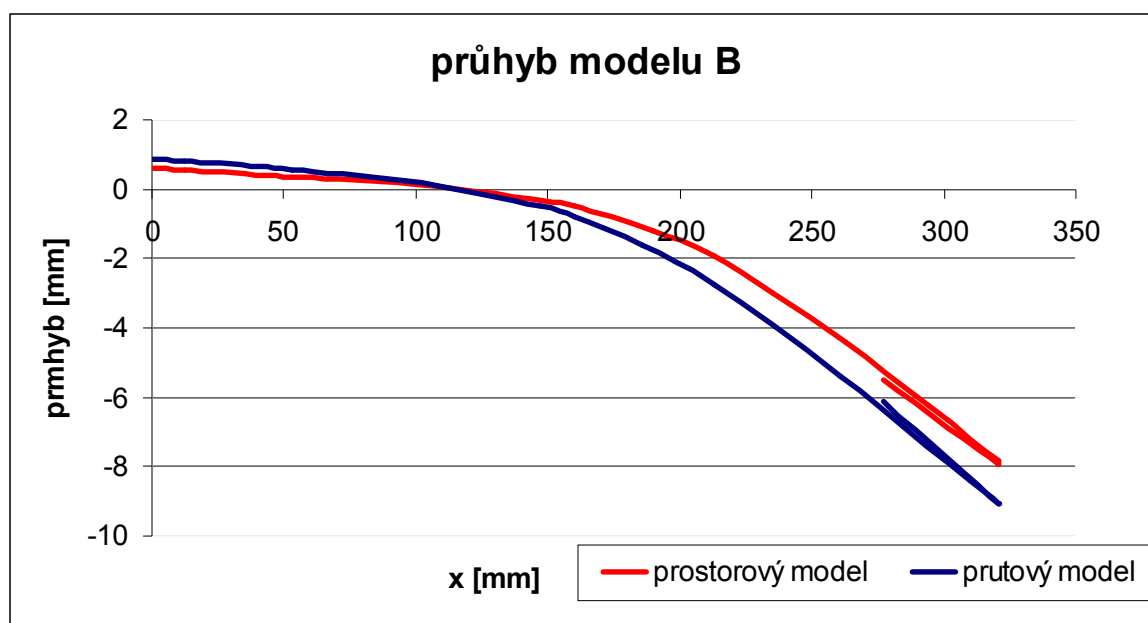
Výpočtový model **B** má značně složitější geometrii. Je tvořen dvacetidevíti prvky s třiceti uzly. Tento výpočtový model má celkem stodvacet stupňů volnosti. Číslování prvků a uzlů modelu **B** navazuje na číslování použité v modelu **A** a je zobrazeno na obr.20.



Obr. 20 Číslování prvků (**tučně**) a uzlů (*kurziva*) modelu **B**

3.2.2 Naladění parametrů prutového modelu **B**

Byla provedena statická analýza, podle předchozích předpokladů. Průhyb prutového tělesa zatíženého vlastní tíhou byl srovnán s výsledky statické analýzy prostorového tělesa, a podle něj byly pozměněny geometrické parametry. Výsledné srovnání naladěného modelu s prostorovým modelem je zobrazeno na obr. 21.



Obr. 21 Srovnání průhybů modelů **B**

Po vyladění prutového modelu **A**, byla provedena kontrolní modální analýza. Byly vypočteny čtyři dvojice vlastních ohybových frekvencí, které jsou uvedeny v tab. 8. Tyto byly srovnány s ohybovými vlastními frekvencemi prostorové modelové soustavy **B**. Srovnání vlastních frekvencí prostorového a prutového modelu je uvedeno v tab.10.

Tab. 10: Srovnání ohybových vlastních frekvencí

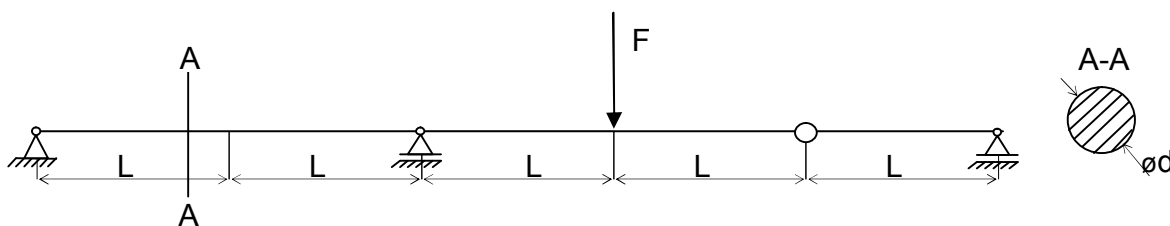
ohybová vlastní frekvence pro prostorový model f_{3D} [Hz]	ohybová vlastní frekvence pro prutový model f_{1D} [Hz]	odchylka Δ [%]
142	137	3,5
498	513	3,0
1273	1264	0.7
2367	2381	0.6

3.3 Zubová spojka v 1D úloze

Zubová spojka je ve výpočtovém modelu uvážena pomocí sférické vazby. V této práci byla tato vazba vytvořena svázáním stupňů volnosti pouze příslušných posuvů v ose y a v ose z . Názorněji je tato myšlenka popsána v této kapitole, která ověřuje správnost této úvahy na rovinné úloze.

3.3.1 Testovací úloha

Pro ověření je zvolen příklad se známým analytickým řešením. Tímto příkladem je soustava těles tvořená dvěma pruty, vzájemně vázanými pomocí rotační vazby. Průhyb je možné odvodit např. pomocí Castiglianovy věty. Pokud se řešení zvolené úlohy bude přibližně rovnat známému analytickému řešení, můžeme předpokládat, že sestavená globální matice tuhosti je správná. Pro ověření správného sestavení globální matice hmotnosti je možno porovnat hodnoty vlastních frekvencí.



Obr. 22 Testovaná soustava těles

Geometrické parametry testované soustavy těles jsou zobrazeny na obr.1. Pruty obou těles mají kruhový průřez o průměru d , celková délka soustavy je $5.L$. Soustava je zatížena silou F . Použitým materiálem je ocel s Youngovým modulem pružnosti E . Jednotlivé hodnoty jsou uvedeny v tab. 11.

Tab. 11: Hodnoty použité v testovací úloze.

$F [N]$	1000
$L [m]$	1
$d [m]$	0,08
$E[Pa]$	$2,1 \cdot 10^{11}$
$\rho[kg.m^{-3}]$	7800

3.3.2 Řešení 1D úlohy v programu Matlab

Použitým prvkem je nosníkový prvek, který umožňuje rovinný ohyb v rovině xy , a nebere v úvahu vliv posouvajících a osových sil. Tento prvek má dva uzly a je popsán jedním posuvem a jedním natočením v každém uzlu. Má tedy čtyři lokální stupně volnosti. Tento prvek je zobrazen na obr. 23. Matice tuhosti tohoto prvku, která je převzata z [5], má tvar:

$$K_e = \frac{E.J_y}{l_e^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6.l_e & -12 & 6.l_e \\ 6.l_e & 4.l_e^2 & -6.l_e & 2.l_e^2 \\ -12 & -6.l_e & 12 & -6.l_e \\ 6.l_e & 2.l_e^2 & -6.l_e & 4.l_e^2 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

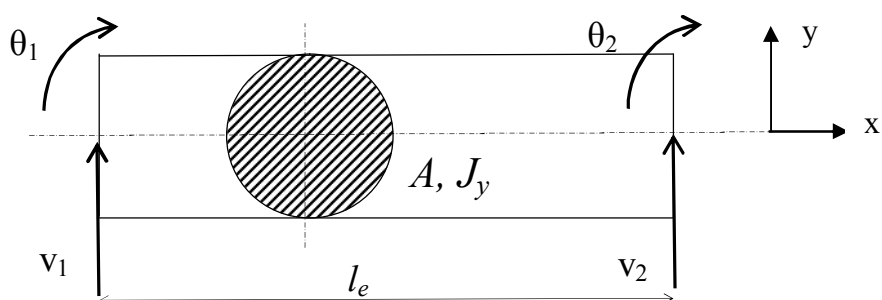
kde l_e je délka prvku, J_y je osový kvadratický moment plochy průřezu a E je modul pružnosti použitého materiálu. Matice hmotnosti prvku, která je převzata z [6], má tvar:

$$M_e = \frac{\rho A l_e}{420} \cdot \begin{bmatrix} 156 & 22.l_e & 54 & -13.l_e \\ 22.l_e & 4.l_e^2 & 13.l_e & -3.l_e^2 \\ 54 & 13.l_e & 156 & -22.l_e \\ -13.l_e & -3.l_e^2 & -22.l_e & 4.l_e^2 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

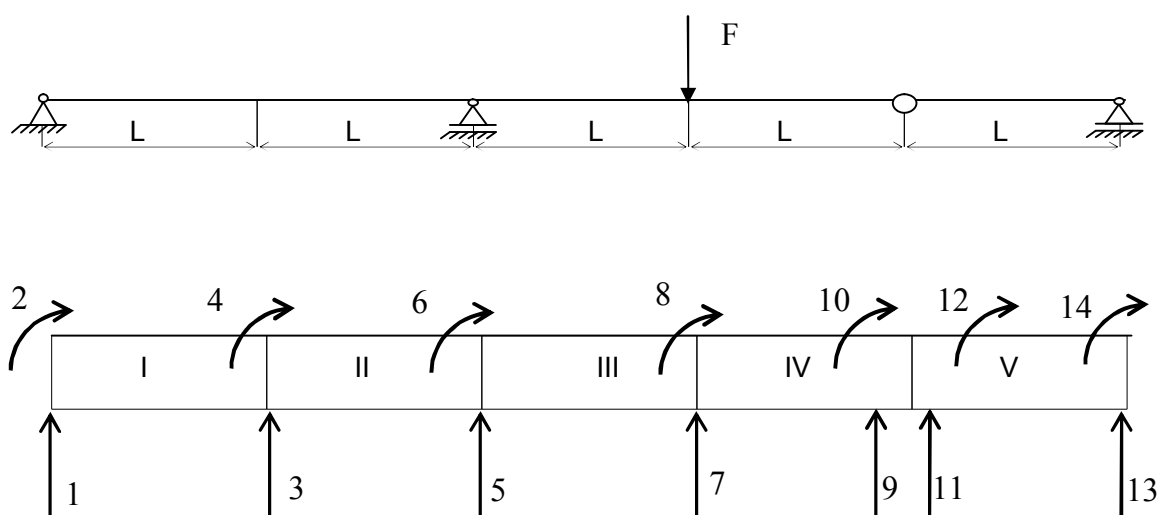
kde ρ je hustota materiálu a A je plocha průřezu.

Testovací nosník je rozdělen na 5 prvků, které jsou očíslovány podle obr. 24. Každý prvek má lokální stupně volnosti, které odpovídají číslování na obr. 23. Jednotlivé posuvy a natočení jsou očíslovány tak, aby stupně volnosti v místě rotační vazby nebyly

svázány. Číslování globálních stupňů volnosti jednotlivých prvků je uvedeno v tab. 12. Pro názornost je globální číslování stupňů volnosti zobrazeno na obr. 24.



Obr. 23 Nosníkový prvek – stupně volnosti



Obr. 24 Konečnoprvkový model s globálním očíslováním stupňů volnosti

Tab. 12: Globální číslování stupňů volnosti

prvek	v_1	θ_1	v_2	θ_2
I	1	2	3	4
II	3	4	5	6
III	5	6	7	8
IV	7	8	9	10
V	11	12	13	14

Rotační vazba je do výpočtového modelu implementována předepsáním vazbové podmínky: posuvy v příslušném uzlu jsou si rovny, zatímco natočení v tomto uzlu nejsou svázány. Toho je docíleno přičtením sloupce odpovídajícího posuvu č. 11 ke sloupci odpovídajícímu posuvu č. 9 a dále přičtením transponovaného sloupce č. 11 do řádku č. 9. Výjimkou je diagonální prvek č.11, který je přičten k diagonálnímu prvku č. 9. Protože sloupec a řádek odpovídající č. 11 je prázdný, je hodnota na diagonále nulová. Abychom nezměnili hodnotu globálních matic, doplníme tento diagonální prvek zvolenou hodnotou. Tento postup je společný pro matici hmotnosti i matici tuhosti. Ve výpočtu vlastních frekvencí se tyto diagonální prvky projeví v jedné hodnotě vlastní frekvence.

Tab. 13: Souhrn podmínek pro řešení

stupeň volnosti globální matice tuhosti	hodnota
č. 1	0 [m]
č. 5	0 [m]
č.7	F [N]
č. 9	č.11
č. 13	0 [m]

Všechny podmínky pro řešení jsou uvedeny v tab. 13. Výpočet zobecněných posuvů je dán řešením rovnice:

$$\mathbf{K}_G \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (24)$$

kde \mathbf{K}_G je globální matice tuhosti, \mathbf{u} je vektor zobecněných posuvů a \mathbf{f} je vektor zatížení. Výpočet vlastních frekvencí vede na řešení zobecněného problému vlastních hodnot:

$$\mathbf{M}_G \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{K}_G \cdot \mathbf{v}, \quad (25)$$

kde \mathbf{M}_G je modální matice tuhosti, λ je vlastní číslo a \mathbf{v} je vlastní vektor. Pro výpočet i-té vlastní frekvence ν [Hz] pak platí vztah:

$$f_i = \frac{\sqrt{\lambda_i}}{2 \cdot \pi}, \quad (26)$$

kde f_i je i-tá vlastní frekvence a λ_i je i-té vlastní číslo.

Celý výpočet tohoto příkladu je realizován v prostředí programu Matlab, pomocí souboru **test.m**, který je uveden v příloze **P. 14**. Hodnoty zobecněných posuvů jsou uvedeny v tab.14, vypočtené hodnoty vlastní frekvence jsou uvedeny v tab.15. I. vlastní frekvence odpovídá nám známým zadaným hodnotám tuhosti a hmotnosti, které jsme zvolili tak, aby přibližně odpovídala hodnotě globálních matic. Její hodnota je 1 Hz.

3.3.3 Analytický výpočet průhybu

Výsledkem řešení úlohy pomocí 1D metody konečných prvků je diskrétní soubor dat. Proto pro porovnání numerického s analytickým řešením volím metodu výpočtu průhybu pomocí Castiglianovy věty. Pro jednoduchost je vypočten y_f průhyb pod silou F .

Soustavu těles spojenou rotační vazbou je možno počítat jako dvě samostatná tělesa. Těleso použité pro výpočet y_f průhybu pod silou F a reakce působící na těleso, je znázorněno na obr. 25. Z podmínky rovnováhy sil a momentů lze pro jednotlivé vazbové síly vyjádřit dle značení v obr. 25:

$$A = -\frac{F}{2}, \quad (27)$$

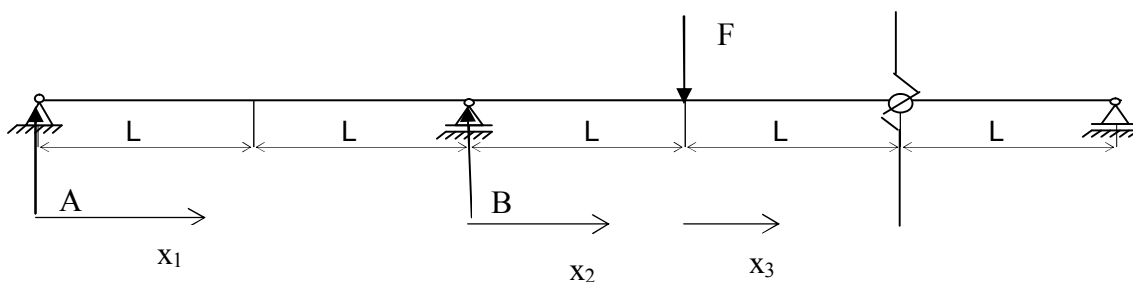
a pro druhou reakci:

$$B = \frac{3 \cdot F}{2}. \quad (28)$$

Pro výpočet průhybu y_f pod silou F dle Castiglianovy věty platí:

$$y_f = \frac{1}{EJ_y} \cdot \left[\int_0^L M_o'(x_1) \cdot \frac{\partial M_o(x_1)}{\partial F} \cdot dx_1 + \int_0^L M_o(x_2) \cdot \frac{\partial M_o(x_2)}{\partial F} \cdot dx_2 + \int_0^L M_o(x_3) \cdot \frac{\partial M_o(x_3)}{\partial F} \cdot dx_3 \right] = \frac{-Fl^3}{EJ_y} \quad (29)$$

Po dosazení do rovnice (29) je hodnota průhybu $y_f = -5.1305 \cdot 10^{-3}$ [m], což odpovídá hodnotě průhybu daného zobecněným posuvem č. 9 (resp. č. 11).



Obr. 25 Značení pro analytický výpočet

3.3.4 Řešení 1D úlohy pomocí programu Ansys

Geometrický model podle obr. 22 byl vytvořen pomocí programu Ansys z 1D nosníkových prvků BEAM3. Požadované průřezové parametry, které byly zadány prvkům jsou plocha průřezu A a kvadratický moment plochy průřezu J_y . Prvku byly přiřazeny materiálové vlastnosti oceli s parametry dle tab. 11.

V místě rotační vazby byly svázány posuvy ve svislém směru pomocí funkce *coupling*. V uzlech příslušících podporám byly odebrány posuvy ve směru svislé osy. V příslušném uzlu působí ve svislém směru síla F o velikosti 1000 N. Výsledek statické analýzy konečno - prvkového modelu je uveden v tab. 25. Všechny stupně volnosti odpovídají číslování dle obr. 23. Výsledek modální analýzy konečno - prvkového modelu je uveden v tab. 15.

3.3.5 Srovnání výsledků

Pro ověření správnosti předchozího předpokladu, je možno srovnat hodnoty zobecněných posuvů vypočtené v programu Matlab v_M a jim odpovídající hodnoty průhybu vypočtené v programu Ansys v_A , toto platí i pro hodnoty vlastních frekvencí. Odchylka zobecněných posuvů a vlastních frekvencí jednotlivých výpočtů je počítána podle vzorce:

$$\Delta = \frac{|v_M - v_A|}{v_A} \cdot 100[\%] \quad (30)$$

Hodnoty odchylky jsou zanedbatelné, a proto lze způsob modelování rovinné rotační vazby považovat za správný.

Tab. 14: Zobecněné posuvy

stupeň volnosti	hodnota zobecněného posuvu vypočteného v programu Matlab	hodnota zobecněného posuvu vypočteného v programu Ansys	odchylka [%]
1	0 [m]	0 [m]	0
2	$7.8946 \cdot 10^{-4}$ [rad.s ⁻¹]	$7.8931 \cdot 10^{-4}$ [rad.s ⁻¹]	0,02
3	$5.9209 \cdot 10^{-4}$ [m]	$5.9198 \cdot 10^{-4}$ [m]	0,02
4	$1.9736 \cdot 10^{-4}$ [rad.s ⁻¹]	$1.9733 \cdot 10^{-4}$ [rad.s ⁻¹]	0,01
5	0 [m]	0 [m]	0
6	$-1.5789 \cdot 10^{-3}$ [rad.s ⁻¹]	$-1.5786 \cdot 10^{-3}$ [rad.s ⁻¹]	0,01
7	$-2.3684 \cdot 10^{-3}$ [m]	$-2.3679 \cdot 10^{-3}$ [m]	0,02
8	$-2.7631 \cdot 10^{-3}$ [rad.s ⁻¹]	$-2.7626 \cdot 10^{-3}$ [rad.s ⁻¹]	0,02
9	$-5.1315 \cdot 10^{-3}$ [m]	$-5.1305 \cdot 10^{-3}$ [m]	0,02
10	$-2.7631 \cdot 10^{-3}$ [rad.s ⁻¹]	$-2.7626 \cdot 10^{-3}$ [rad.s ⁻¹]	0,02
11	$-5.1315 \cdot 10^{-3}$ [m]	$-5.1305 \cdot 10^{-3}$ [m]	0,02
12	$5.1315 \cdot 10^{-3}$ [rad.s ⁻¹]	$5.1305 \cdot 10^{-3}$ [rad.s ⁻¹]	0,02
13	0 [m]	0 [m]	0
14	$5.1315 \cdot 10^{-3}$ [rad.s ⁻¹]	$5.1305 \cdot 10^{-3}$ [rad.s ⁻¹]	0,02

Tab. 15: Vlastní frekvence

číslo vl. frekvence	hodnota vlastní frekvence [Hz] vypočtené v programu Matlab	hodnota vlastní frekvence [Hz] vypočtené v programu Ansys	odchylka [%]
1	1	-	-
2	7.4906	7.4888	0,02
3	45.68	45.654	0,06
4	73.12	77.254	5,4
5	180.93	180.58	0,2
6	219.84	219.29	0,25
7	285.5	283.26	0,79
8	479.51	477.24	0,47
9	674.89	670.22	0,69
10	829.11	822.84	0,76
11	1079.1	1060.6	1,74

3.4 Prutový model rotoru

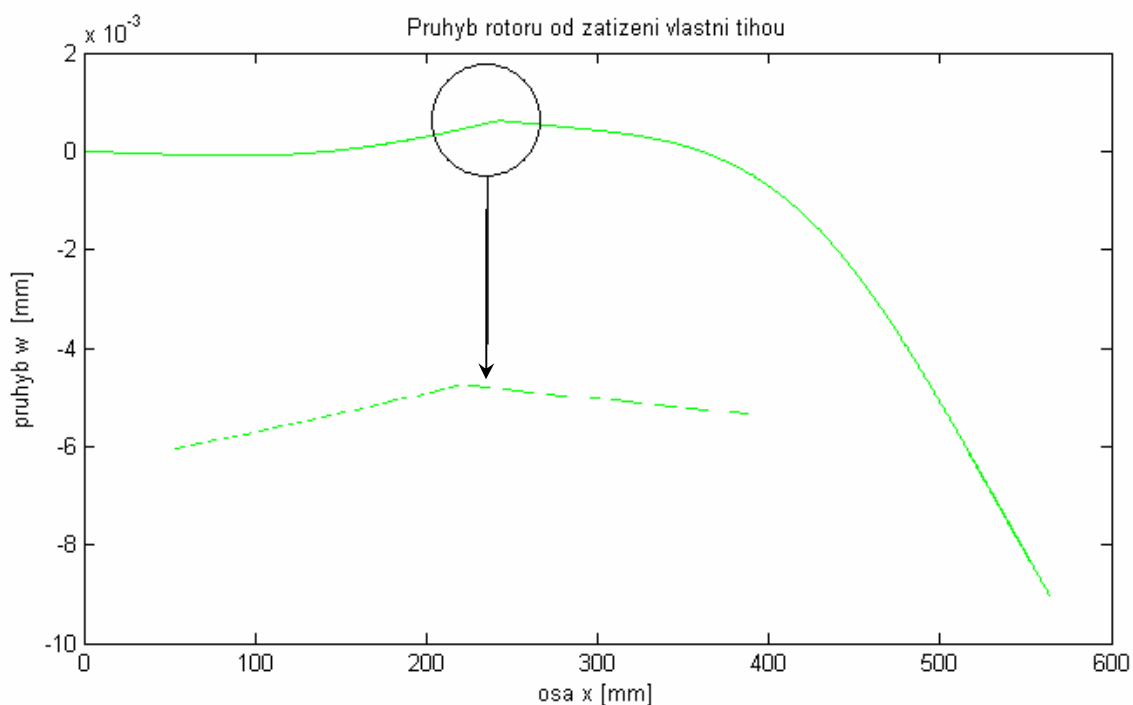
Geometrie 1 D výpočtového modelu je táž, jako u naladěných prutových modelů **A** a **B** z kapitoly 3.1.2 a 3.2.2. Prutový výpočtový model celého rotoru je tedy vytvořen spojením naladěného prutového modelu **A** a naladěného prutového modelu **B** pomocí sférické vazby, která v tomto modelu plní funkci zubové spojky.

3.4.1 Sférická vazba

Výpočtový prutový model celého rotoru je vytvořen spojením prutového modelu **A** a prutového modelu **B** pomocí sférické vazby, která je vytvořena svázáním stupňů volnosti pouze příslušných posuvů v ose y a v ose z . Názorněji je tato myšlenka popsána v kapitole 3.3, kde je uveden princip tvorby této vazby v rovině xy . Analogicky je tomu i v rovině xz . Stupně volnosti, kterým odpovídá sférická vazba jsou posuvy v a w j -tého uzlu (obr.17) prvku č. 20 a posuvy v a w i -tého uzlu prvku č. 21. Svázání posuvů v a w příslušných stupňů volnosti je použito na globální matici tuhosti, hmotnosti, tlumení, cirkulační matici a matici gyroskopických účinků a také na vektor zobecněných sil.

Správnost použití byla ověřena u analýzy průhybu od zatížení vlastní tíhou, který je vykreslen na obr. 26 pomocí tvarové funkce elementu.

Jak již bylo řečeno v předchozí kapitole 3.3.2, aby se nezměnila hodnota globálních matic je třeba doplnit chybějící diagonální prvky matice v místě sférické vazby. Tento výpočtový model je vytvořen podle potřeby následné dynamické analýzy, a proto jsou tyto hodnoty voleny tak, aby vypočtené vlastní frekvence nezasahovaly do následujících dynamických analýz. Jejich hodnoty jsou uvedeny v tab. 16.



Obr. 26 Průhyb od zatížení vlastní tíhou; detail v místě sférické vazby

Tab. 16: Pomocné diagonální prvky globálních matic

$K_{85,85/86,86}$ - matice tuhosti [N.m]	$M_{85,85/86,86}$ - matice hmotnosti [kg]	$K_{C85,85/86,86}$ - cirkulační matice [N.m.s]	$B_{85,85/86,86}$ - matice tlumení [N.m.s]	$G_{85,85/86,86}$ - matice gyroskopických účinků
1	0,1	100	1	0

3.4.2 Uvážení tlumení ve výpočtovém modelu

Tlumení je ve výpočtovém modelu definováno jako proporcionální tlumení, které je zavedeno pomocí Rayleighho součinitelů tlumení α a β . Do výpočtového modelu je zahrnuto globální maticí tlumení **B** pro kterou platí:

$$\mathbf{B} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} + \eta \mathbf{K}, \quad (31)$$

kde \mathbf{M} je globální matice hmotnosti, \mathbf{K} je globální matice tuhosti a η je součinitel viskózního tlumení. Člen $\alpha \mathbf{M}$ představuje vnější konstrukční tlumení, které je funkcí hmotnosti kmitající soustavy a člen $\beta \mathbf{K}$ zahrnuje materiálové tlumení, které je podobně jako tuhost pružných prvků soustavy funkcí vnitřních materiálových vlastností [8]. Rayleighho součinitel tlumení α volím $\alpha=5$. Rayleighho součinitel tlumení β má obvykle u malých rotorů zanedbatelný vliv a lze jej zanedbat. Člen $\eta \mathbf{K}$ představuje materiálové tlumení, rotující soustavy, proto není tento člen za klidu do soustavy rovnic (31) započten.

Přijmeme dva zjednodušující předpoklady pro odhad velikosti součinitele viskózního tlumení. Prvním předpokladem je, že lze použít vzorec odvozený pro harmonické kmitání, který je definován rovnicí:

$$\eta = \frac{\psi}{2 \cdot \pi \cdot \omega}, \quad (32)$$

kde ψ je materiálová konstanta tlumení, a pro ocel se jeho hodnota pohybuje v intervalu $\psi = 5 \cdot 10^{-4} - 1 \cdot 10^{-3}$ [7], a ω je kruhová frekvence harmonického kmitání. Druhým zjednodušujícím předpokladem je, že kruhovou frekvenci ω lze s dostačenou přesností nahradit 1. ohybovou vlastní frekvencí soustavy vypočtenou bez uvážení tlumení. Její hodnota je $\omega = 138 \text{ Hz} = 2 \cdot \pi \cdot 138 = 867 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Po dosazení do rovnice (32) se viskózní tlumení pohybuje v intervalu: $\eta = 5,8 \cdot 10^{-7} - 1,2 \cdot 10^{-6}$. Předpokládejme, že skutečná hodnota viskózního tlumení náleží tomuto intervalu, a že dynamické chování rotoru je na tomto parametru lineárně závislé, z čehož plyne, že pro výpočet intervalu, ve kterém leží předpokládané správné řešení, lze použít pouze mezní hodnoty tohoto intervalu. Tyto předpoklady jsou využity v dalších analýzách.

4. Dynamická analýza

Následující počítačové simulace byly provedeny pomocí metody konečných prvků s uvažováním tuhosti, hmotnosti, tlumení a gyroskopických účinků soustavy. Diskretizace soustavy byla provedena tak, jak je popsáno v kapitole 3.

Definujme potřebné vztahy pro následující analýzy. Pohybová rovnice soustavy má tvar:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{B} - \omega \cdot \mathbf{G}) \cdot \dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K} + \omega \cdot \mathbf{K}_C) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{f}, \quad (33)$$

kde \mathbf{x} je vektor zobecněných posuvů, $\dot{\mathbf{x}}$ je vektor zobecněných rychlostí, $\ddot{\mathbf{x}}$ je vektor zobecněných zrychlení, ω je úhlová rychlost otáčení soustavy, kolem osy rotace x a \mathbf{f} je vektor zobecněných sil. Pro harmonické buzení má vektor zobecněných sil tvar:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_o + \mathbf{f}_C \cdot \cos(\omega t) + \mathbf{f}_S \cdot \sin(\omega t), \quad (34)$$

kde \mathbf{f}_o je vektor zobecněných stacionárních sil, \mathbf{f}_C je kosinová složka vektoru zobecněných sil závislých na čase a \mathbf{f}_S je sinová složka vektoru zobecněných sil závislých na čase. Při analýze průhybu ze zatížení vlastní tíhou je třeba řešit tuto rovnici:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{f}_o. \quad (35)$$

Pokud vektor zobecněných sil \mathbf{f} v rovnici (33) nahradíme nulovým vektorem \mathbf{o} získáme rovnici:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{B} - \omega \cdot \mathbf{G}) \cdot \dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K} + \omega \cdot \mathbf{K}_C) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}, \quad (36)$$

kteřá vede na řešení kvadratického problému vlastních hodnot. Ten převedeme na zobecnělý problém vlastních hodnot tak, že k rovnici (36) přičteme rovnici (37):

$$\mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{o}. \quad (37)$$

Dostaneme tedy soustavu dvou rovnic:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{B} - \omega \cdot \mathbf{G} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{v} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & -(\mathbf{K} + \omega \cdot \mathbf{K}_C) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{v} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (38)$$

kde λ je vlastní číslo a \mathbf{v} je vlastní vektor. Což lze zapsat rovnicí:

$$\lambda \mathbf{M}_2 \mathbf{v}' + \mathbf{K}_2 \mathbf{v}' = \mathbf{o}, \quad (39)$$

kde \mathbf{v}' je rozšířený vlastní vektor definovaný :

$$\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{v} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad (40)$$

\mathbf{M}_2 je rozšířená matice definovaná:

$$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{B} - \omega \cdot \mathbf{G} \end{pmatrix}, \quad (41)$$

a \mathbf{K}_2 je rozšířená matice definovaná:

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & -(\mathbf{K} + \omega \cdot \mathbf{K}_C) \end{pmatrix}, \quad (42)$$

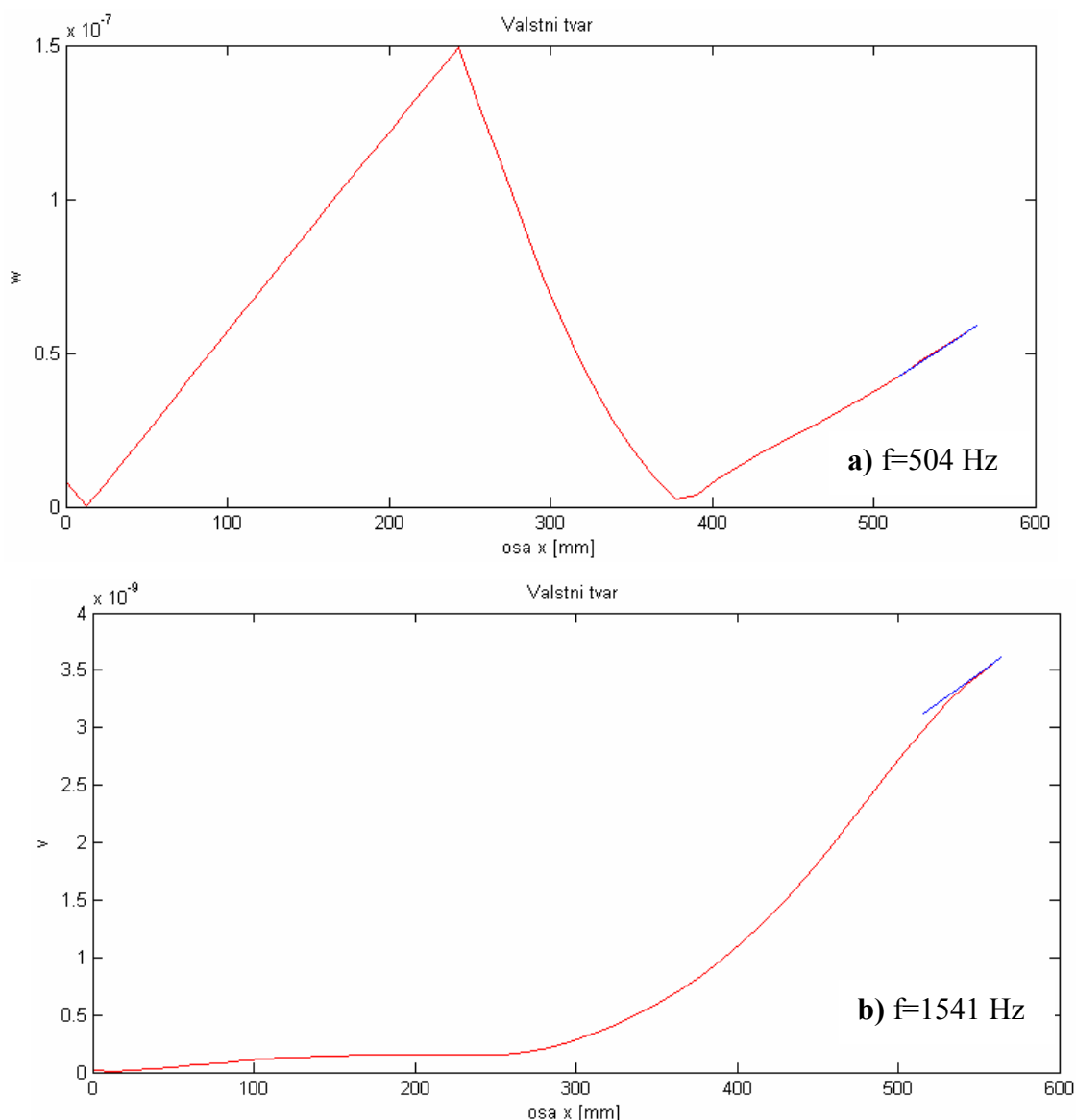
Výpočet vlastních frekvencí a vlastních tvarů vede na řešení zobecněného problému vlastních hodnot [9]:

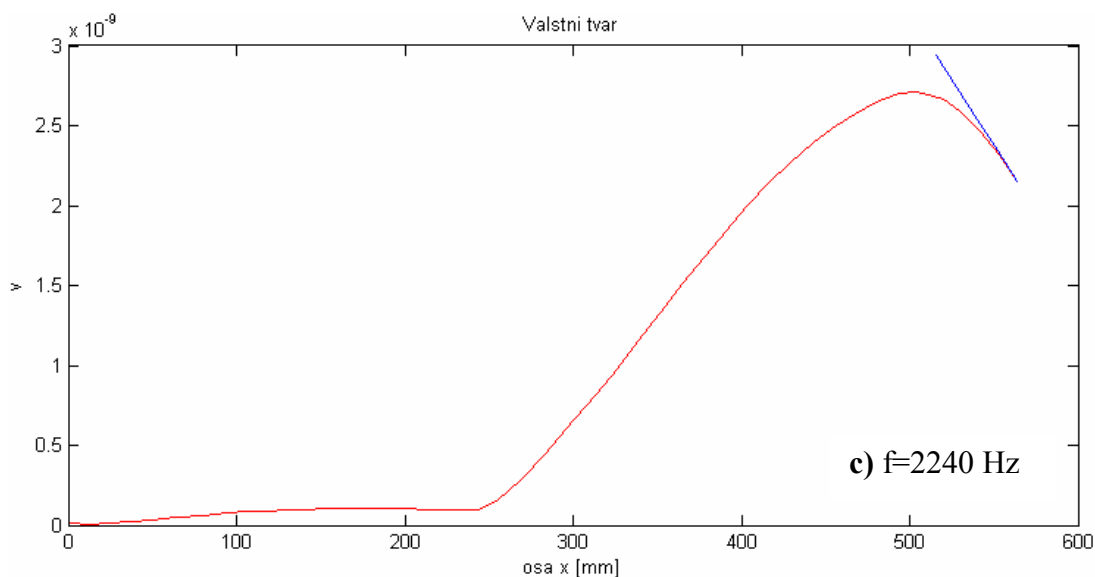
$$\mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{v}' = \lambda \cdot \mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{v}', \quad (43)$$

Ze vztahů (41) a (42) je patrné, že vlastní tvary \mathbf{v} a vlastní frekvence soustavy λ jsou závislé na hodnotě úhlové rychlosti otáčení soustavy ω . Vlastní tvary \mathbf{v} jsou pro první dvě dvojice vlastních frekvencí λ , při vykreslovacích otáčkách

$\omega = \frac{\omega_{\max}}{2} = \frac{23500}{2} \text{ ot. min}^{-1}$, zobrazeny na obr. 27. Z důvodu tvarové symetrie je zobrazen

pouze jeden z dvojice vlastních tvarů. Modře je zvýrazněna část hřídele mezi oběma koly.





Obr. 27 Vlastní tvary při otáčkách $\omega = \frac{\omega_{\max}}{2} = \frac{23500}{2} \text{ ot. min}^{-1}$

4.1 Sestavení Campbellových diagramů pro předpokládaný rozsah hodnot úhlové rychlosti otáčení

Campbellův diagram rotorové soustavy, je definován jako závislost vlastních frekvencí na úhlové rychlosti otáčení hřídele. Vlastní frekvence rotorové soustavy získáme řešením zobecněného problému vlastních hodnot daného soustavou rovnic (43). Vlastní čísla této soustavy jsou komplexní:

$$\lambda = \lambda_{Re} + i\lambda_{Im}, \quad (44)$$

Reálná část komplexního vlastního čísla představuje součinitel dozívání a imaginární část představuje vlastní frekvenci tlumeného kmitání.

Z Campbellova diagramu lze odečíst kritické otáčky rotorové soustavy. Pro jejich jednodušší odečtení je v Campbellově diagramu zobrazena náběhová přímka. Kritické otáčky odpovídají průsečíkům náběhové přímky a jednotlivých křivek Campbellova diagramu, které odpovídají příslušným vlastním frekvencím. Maximální otáčky rotoru jsou $\omega_{\max} = 23500 \text{ ot. min}^{-1} = 2461 \text{ rad. s}^{-1}$, výpočet vlastních hodnot byl tedy proveden v rozsahu od 0 do 2461 rad. s^{-1} .

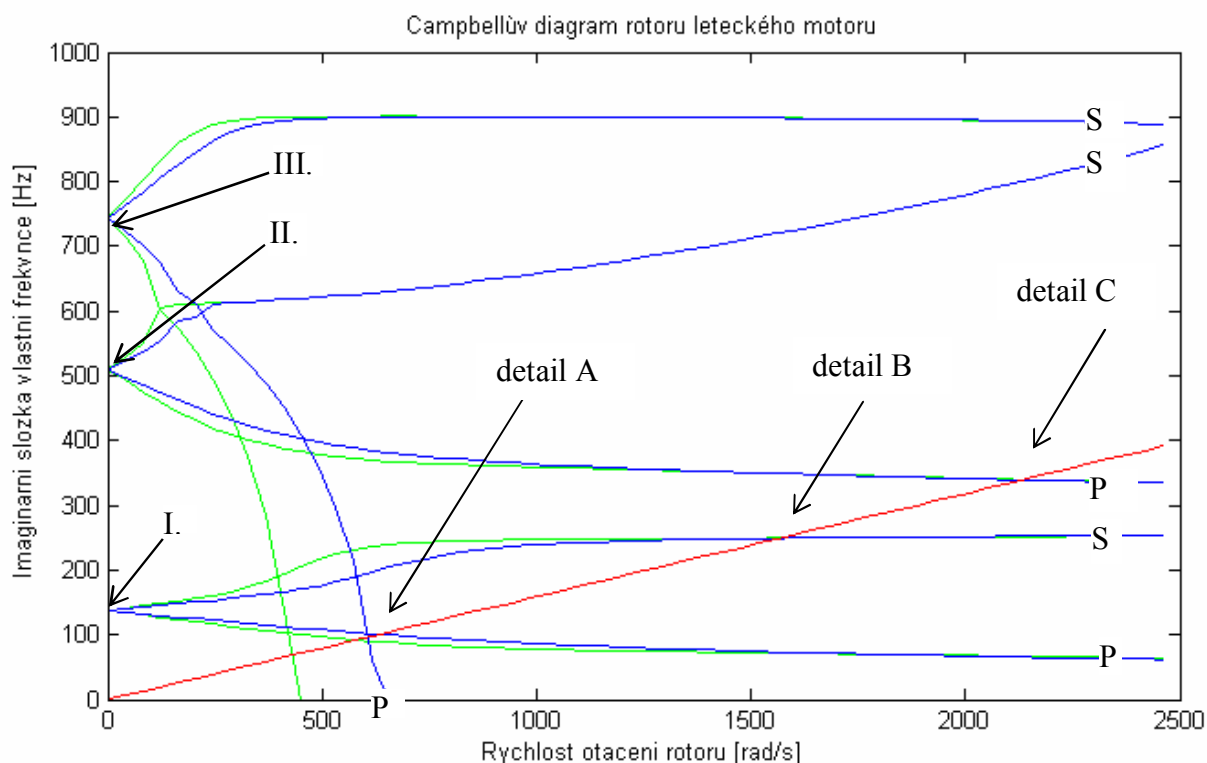
Hodnota viskózního tlumení se pohybuje v intervalu:

$$\eta = 5,8 \cdot 10^{-7} - 1,2 \cdot 10^{-6}.$$

Campbellův diagram je pro dvě krajní hodnoty viskózního tlumení zobrazen na obr. 28. Předpokládáme, že dynamické chování rotoru je na tomto parametru lineárně závislé, a

proto skutečné kritické otáčky leží v intervalech, jejichž krajní hodnoty jsou dány průsečíky Campbellova diagramu s náběhovou přímkou. Z diagramu z obr. 28 jsou vyobrazeny detaily pro určení kritických otáček na obr. 29. Jejich hodnoty jsou uvedeny v tab. 17, ze které je patrné, že součinitel viskózního tlumení materiálu η se projevuje zejména pro nižší otáčky.

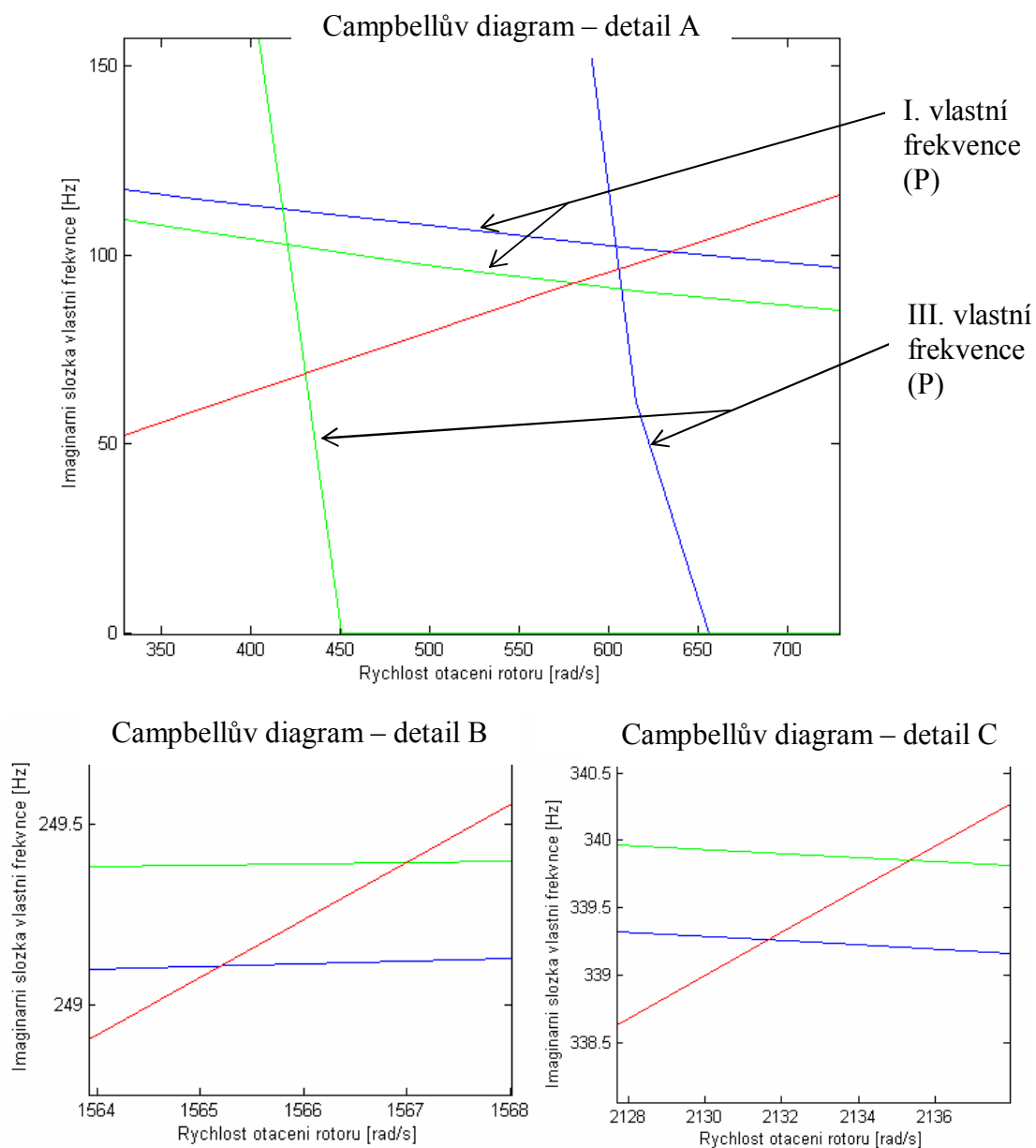
Vlastní frekvence soustavy za klidu se v případě rotující soustavy vlivem gyroskopických účinků rozštěpí na souběžnou a protiběžnou větev. V Campbellově diagramu na obr. 28 je souběžná větev označena symbolem (S) a protiběžná větev symbolem (P). Přetlumením vyšších vlastních tvarů soustavy (43), se vyšší vlastní frekvence rotoru mohou projevit jako kritické otáčky. Tento jev můžeme také pozorovat v Campbellově diagramu na obr. 28, z něž je patrné utlumení protiběžné větve III. vlastní frekvence. Na obr. 29 a) pozorujeme pro nižší hodnoty viskózního tlumení materiálu, že protiběžné větve křivek I. a III. vlastní frekvence, protínají náběhovou přímkou velice blízko sebe. Tato situace nemá na rotující soustavu negativní vliv, protože se jedná o dvě protiběžné větve.



Obr. 28 Campbelův diagram s proměnným parametrem – viskózní tlumení η
červeně - náběhová příčka, zeleně - $\eta = 1,2 \cdot 10^{-6}$, modře - $\eta = 5,8 \cdot 10^{-7}$

Tab. 17: Intervaly předpokládaných hodnot kritických otáček

vlastní frekvence	f vlastní frekvence [Hz]	ω_{kr} kritické otáčky [$rad.s^{-1}$]
I. (P)	92-101	581-634
I. (S)	249,1-249,4	1565 -1567
II. (P)	339,2-339,8	2132-2135
III. (P)	69-96	431-605



Obr. 29 Campbelův diagram – odečtení kritických otáček

4.2 Amplitudo – frekvenční charakteristika rotoru a výpočet kmitání rotoru vynuceného nevyvážeností

Po ustálení chodu rotoru zůstává vynucené, nevyvážeností vybuze kmitání. Pro soustavu platí pohybová rovnice (33). Vektor zobecněných sil \mathbf{f} má tvar (34), kde \mathbf{f}_0 je stacionární síla, která na kmitání soustavy nemá vliv. Amplitudo - frekvenční charakteristika rotoru, který kmitá kolem rovnovážné polohy, je zobrazena na obr. 31.

Kmitání rotoru vynucené nevyvážeností je harmonicky buzený pohyb. Budící síly, které působí v důsledku nepřesného nasazení kotouče, lze zapsat do vektoru buzení:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_C \cdot \cos(\omega t) + \mathbf{f}_S \cdot \sin(\omega t), \quad (45)$$

kde pro zobecněný vektor sil kosinové složky platí:

$$\mathbf{f}_C = \begin{bmatrix} F_{CY} \\ F_{CZ} \\ M_{CY} \\ M_{CZ} \end{bmatrix} \quad (46)$$

a pro zobecněný vektor sil sinové složky platí:

$$\mathbf{f}_S = \begin{bmatrix} F_{SY} \\ F_{SZ} \\ M_{SY} \\ M_{SZ} \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Jednotlivé složky vektorů (46) a (47) pro excentricky uložený kotouč s velikostí excentricity e_T , o hmotnosti nevyváhy m , který rotuje s fázovým posuvem ψ_0 získáme následujícím silovým rozborem. Podle obr. 30 pro složky síly působící ve směru osy y platí:

$$F_{OY} = m \cdot e_T \cdot \omega^2 \cos(\omega t + \psi_0) = F_{CY} \cdot \cos(\omega t) + F_{SY} \cdot \sin(\omega t), \quad (48)$$

kde F_{CY} a F_{SZ} jsou:

$$\begin{aligned} F_{CY} &= m \cdot e_T \cdot \omega^2 \sin(\psi_0) \\ F_{SY} &= -m \cdot e_T \cdot \omega^2 \sin(\psi_0) \end{aligned} \quad (49)$$

Analogicky platí pro složky momentu M_{OY} :

$$M_{OY} = m \cdot e_T \cdot a \cdot \omega^2 \cos(\omega t + \psi_0), \quad (50)$$

kde a je vzdálenost středu hmotnosti od uzlu i a M_{CY} a M_{SY} jsou:

$$\begin{aligned} M_{CY} &= m \cdot e_T \cdot a \omega^2 \sin(\psi_0) \\ M_{SY} &= -m \cdot e_T \cdot a \omega^2 \sin(\psi_0) \end{aligned} \quad (51)$$

Pro složky síly působící ve směru osy z platí:

$$F_{OZ} = m.e_T.\omega^2 \sin(\omega t + \psi_o), \quad (52)$$

kde F_{CZ} a F_{SZ} jsou:

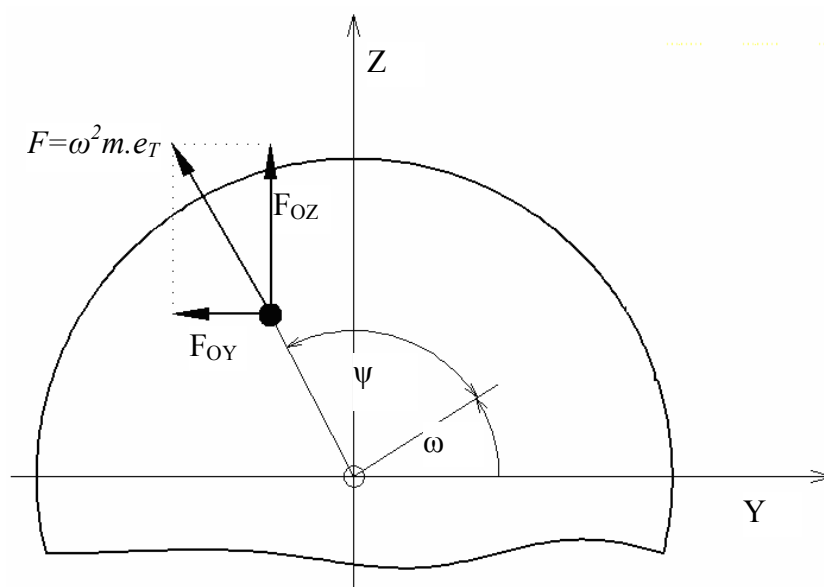
$$\begin{aligned} F_{CZ} &= m.e_T.\omega^2 \sin(\psi_o) \\ F_{SZ} &= m.e_T.\omega^2 \cos(\psi_o) \end{aligned} \quad (53)$$

Analogicky platí pro složky momentu M_{OZ} :

$$M_{OZ} = m.e_T.a.\omega^2 \sin(\omega t + \psi_o), \quad (54)$$

M_{CZ} a M_{SZ} jsou:

$$\begin{aligned} M_{CZ} &= m.e_T.a.\omega^2 \sin(\psi_o) \\ M_{SZ} &= m.e_T.a.\omega^2 \cos(\psi_o) \end{aligned} \quad (55)$$



Obr. 30 Silový rozbor

Předpokládaný tvar řešení pohybové rovnice soustavy (33) je:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_C \cos(\omega t) + \mathbf{x}_S \sin(\omega t). \quad (56)$$

Pokud první a druhou derivaci vektoru předpokládaného řešení (56) podle času, dosadíme do pohybové rovnice soustavy (33) získáme porovnáním činitelů u $\cos(\omega t)$ a $\sin(\omega t)$ soustavu rovnic, která lze sloučit v jednu soustavu [10]:

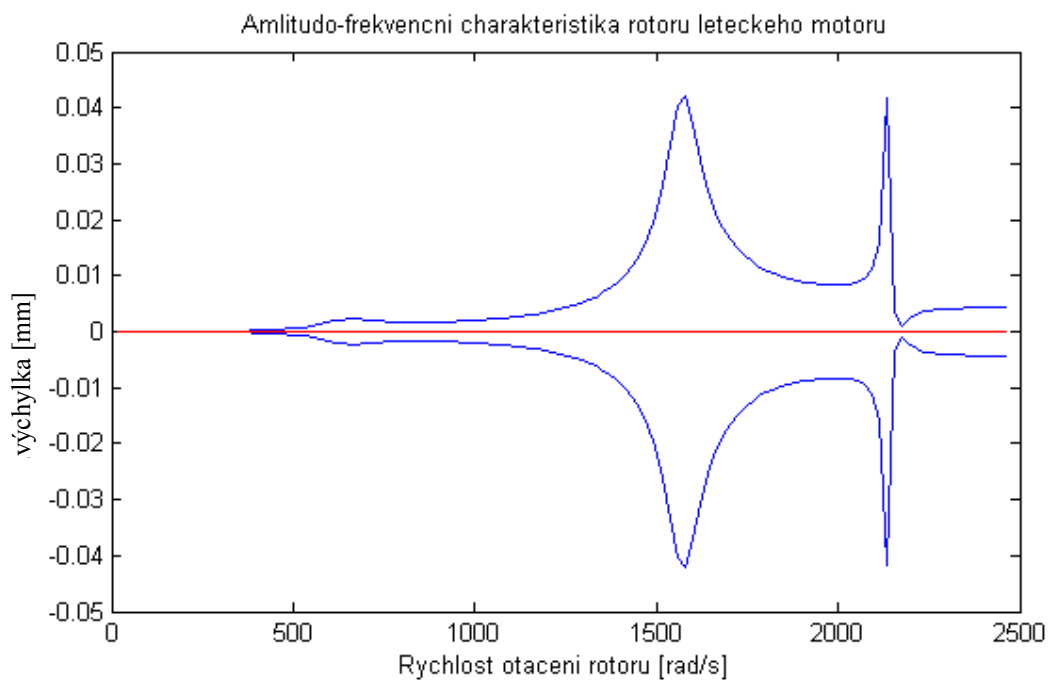
$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} + \omega \mathbf{K}_C - \omega^2 \mathbf{M} & \omega \mathbf{B} \\ -\omega \mathbf{B} & \mathbf{K} + \omega \mathbf{K}_C - \omega^2 \mathbf{M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_C \\ \mathbf{x}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_C \\ \mathbf{f}_S \end{bmatrix}. \quad (57)$$

Předpokládaný tvar rozkmitu soustavy je zobrazen na obr. 31. Jeho velikost závisí na několika parametrech, které nebyly dosud upřesněny. Hodnota excentricity nasazení kol

je $e_T = 0,01$ [mm]. Hodnoty viskózního tlumení η a fázových posuvů jednotlivých kol ψ_0 jsou zvoleny a jejich velikost je uvedena v tab. 18.

Tab. 18: Souhrn parametrů amplitudo-fázové charakteristiky

součinitel viskózního tlumení η	$5,8 \cdot 10^{-7}$
fázový posuv kola A ψ_0	0°
fázový posuv kola B ψ_0	180°



Obr. 31 Amplitudo – frekvenční charakteristika v místě kola **B**
červeně – rovnovážná poloha, modře – rozkmit amplitudy

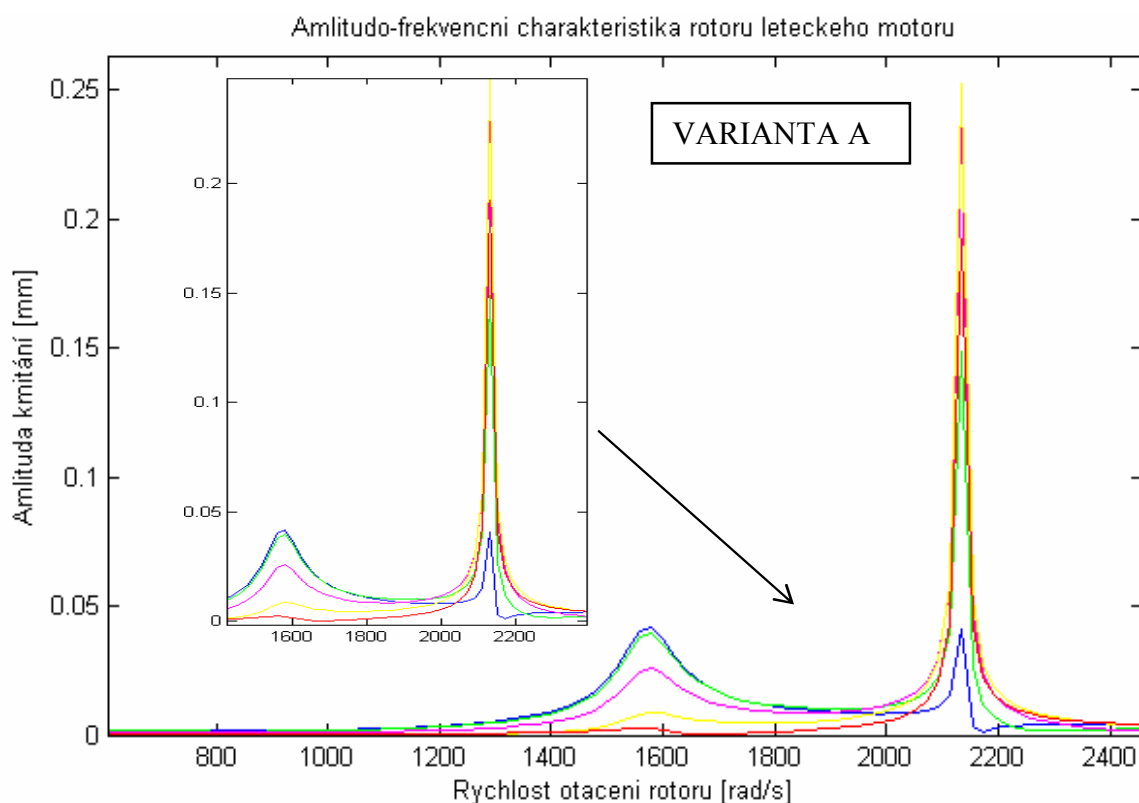
V předchozích analýzách byla brána tuhost ložiska jako jediná neměnná tuhost vazby soustavy rotoru s okolím. Tuhost ve vazbě se však může snížit o tuhost podpěr ložiska. Toto snížení uvažujeme až okolo 60 %. Protože se změna tuhosti projeví na hodnotách vlastních frekvencí soustavy, je ji třeba zahrnout do výpočtu.

Fázový posuv kol ψ_0 , součinitel viskózního tlumení materiálu η a tuhosti podpěr jsou proměnnými parametry, a jsou pro danou soustavu známy pouze jako interval možných hodnot. Pro jednotlivé hodnoty těchto parametrů ověříme jejich vliv na amplitudo - frekvenční charakteristiku. Zvolme referenční model, u kterého je jeden z parametrů proměnný. V tab. 19 jsou uvedeny hodnoty použitých parametrů pro tři varianty výpočtu.

Amplitudo – frekvenční charakteristiky jednotlivých variant rotorové soustavy jsou zobrazeny na obr. 32 - 34.

Tab. 19: Souhrn proměnných parametrů amplitudo-fázové charakteristiky

	VARIANTA A	VARIANTA B	VARIANTA C
tuhost podpěr	100% k	100% k	60 -100% k
součinitel viskózního tlumení η	$5,8 \cdot 10^{-7}$	$5,8 \cdot 10^{-7} - 1,2 \cdot 10^{-6}$	$5,8 \cdot 10^{-7}$
fázový posuv kola B ψ_0	0° - 180°	180°	180°

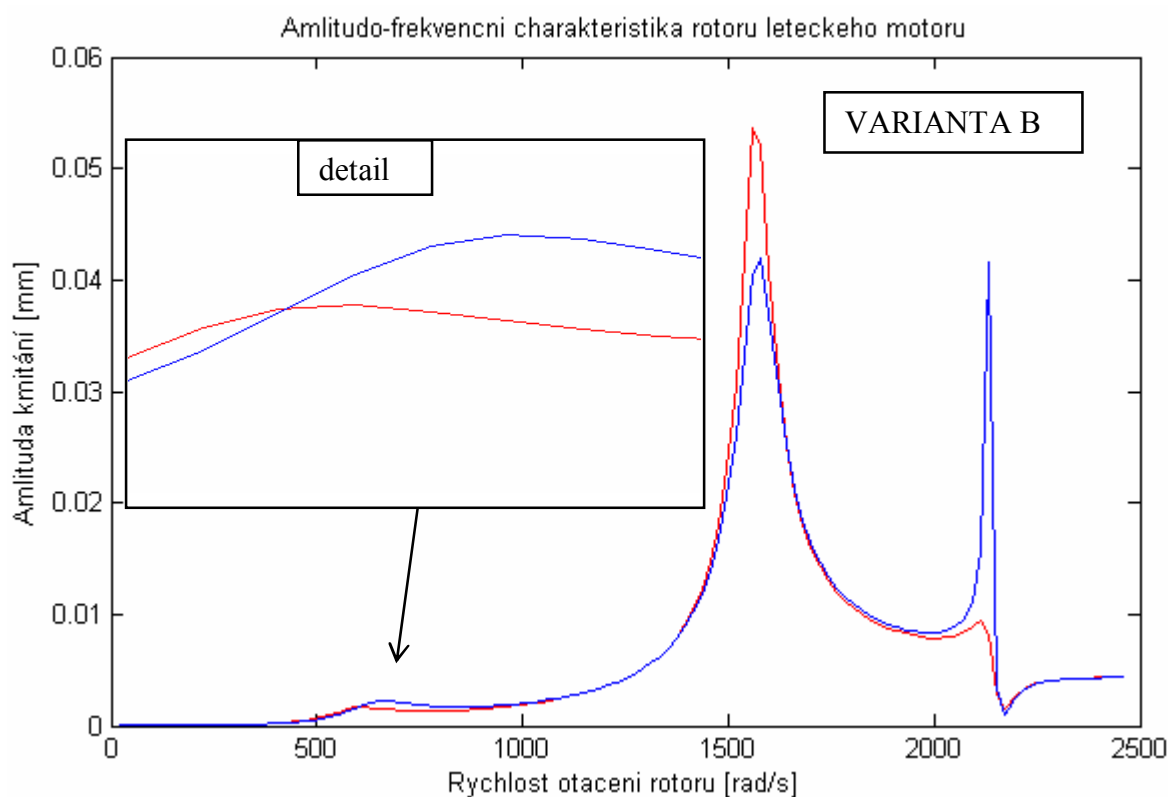


Obr. 32 Amplitudo – frekvenční charakteristika – amplituda kmitání kola **B**

VARIANTA A - fázový posuv kola **B** $\psi_0 = 0^\circ$ – modře, 45° – zeleně, 90° – fialově, 135° – žlutě, 180° – červeně

Z diagramu na obr. 32 můžeme vyčíst vliv fázového posuvu kola **B** ψ_0 na amplitudo – frekvenční charakteristiku. Zvyšováním fázového posuvu kola **B** se zvyšuje

amplituda kmitání okolo kritických otáček $2132 \text{ [rad.s}^{-1}\text{]}$ a naopak klesá amplituda kmitání okolo kritických otáček $1565 \text{ [rad.s}^{-1}\text{]}$.

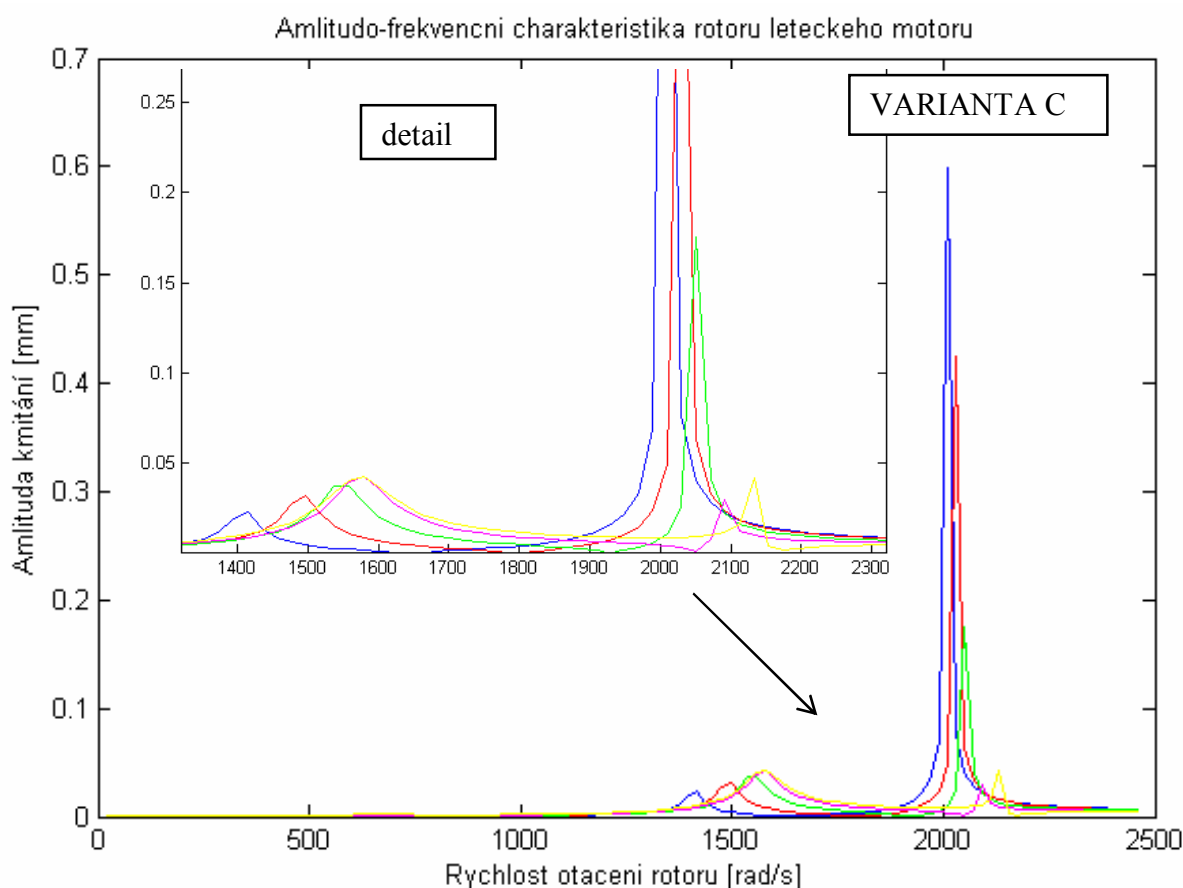


Obr. 33 Amplitudo – frekvenční charakteristika v místě kola **B**

VARIANTA B – modře $\eta=5,8 \cdot 10^{-7}$, červeně $\eta=1,2 \cdot 10^{-6}$

Z diagramu na obr. 33 můžeme vyčíst vliv součinitele viskózního tlumení materiálu na amplitudo – frekvenční charakteristiku. Detailní zobrazení ukazuje již známou skutečnost, že díky utlumeným vlastním frekvencím mohou být některé kritické otáčky soustavy také funkcí tlumení. S rostoucí hodnotou součinitele viskózního tlumení materiálu klesá vliv II. vlastní frekvence z protiběžné větve, a naopak se zvyšuje amplituda kmitání při otáčkách rotoru blízkých I. vlastní frekvenci souběžné větve. Připomeňme, že amplituda je vykreslena pro uzel v místě kola **B**.

Z obr. 34 můžeme vyčíst vliv změny tuhosti podpěr na amplitudo – frekvenční charakteristiku. Zprv je třeba znovu zdůraznit, že vlivem změny tuhosti podpěr se mění hodnota kritických otáček. Z obr. 34 dále vidíme, že s poklesem tuhosti podpěr maximální amplituda kmitání roste.



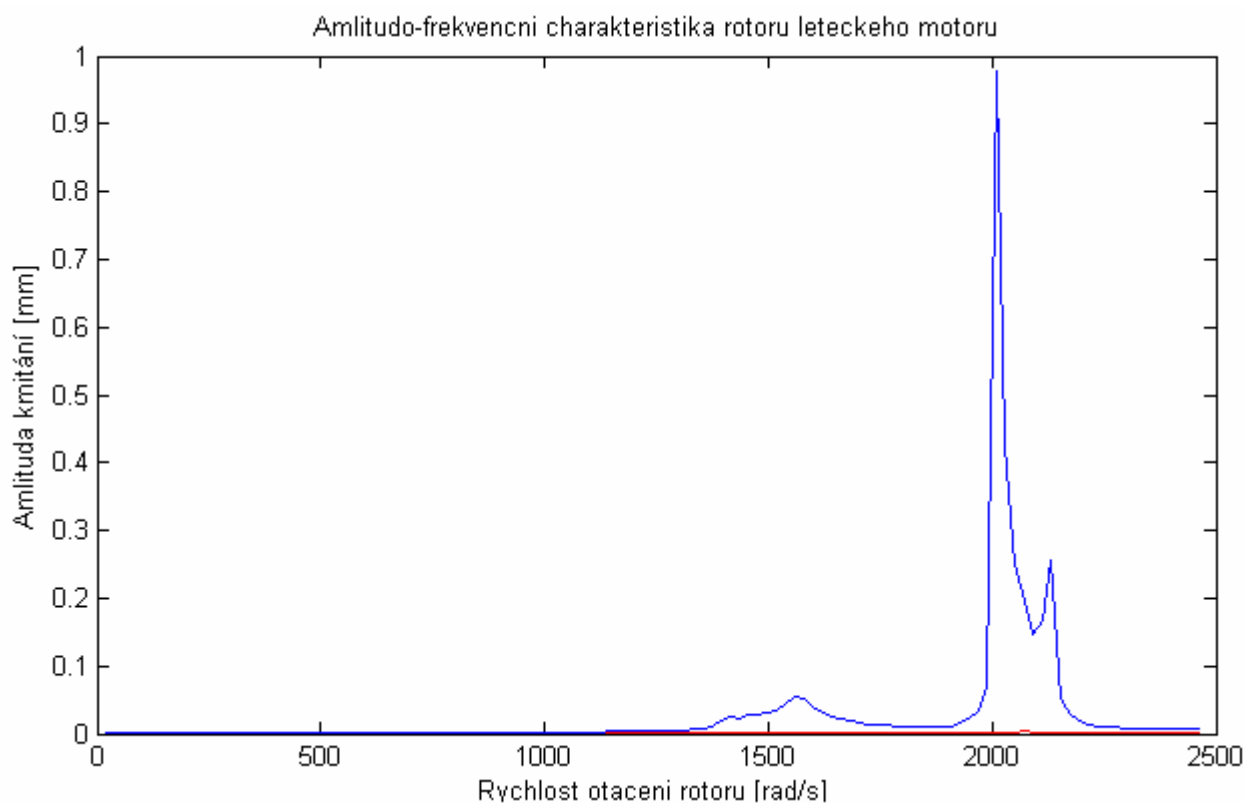
Obr. 34 Amplitudo – frekvenční charakteristika v místě kola **B**

VARIANTA C – tuhost podpor 60% z k – modře, 70% z k – červeně, 80% k – zeleně, 90% z k – fialově, 100% z k – žlutě

Z předchozí analýzy je patrné, že všechny tři proměnné parametry výrazně ovlivňují řešení. Proto zvolme jiný přístup k hledání řešení. Fázový posuv ψ_0 , součinitel viskózního tlumení η a tuhosti podpěr jsou proměnnými parametry, které jsou pro danou soustavu známy pouze jako možný interval hodnot, který obsahuje správné řešení. Hodnoty těchto parametrů jsou uvedeny v tab.20. Pokud provedeme simulaci pro všechny varianty těchto proměnných parametrů, předpokládejme, že skutečné řešení leží v intervalu, který je ohraničen obálkou nejvyšších a nejnižších vypočtených hodnot amplitud. Tato obálka je zobrazena na obr. 35. Nejvýraznější špička v grafu je nejvíce ovlivněna snížením tuhosti uložení, které zvyšuje amplitudu kmitání a snižuje hodnotu kritických otáček rotoru. Druhá špička je nejvíce ovlivněna situací, kdy kolo **B** kmitá s fázovým posuvem 180° .

Tab. 20: Souhrn proměnných parametrů amplitudo-fázové charakteristiky

tuhost podpěr	60-100% k
součinitel viskózního tlumení η	$5,8 \cdot 10^{-7} - 1,2 \cdot 10^{-6}$
fázový posuv kola B ψ_0	$0^\circ - 360^\circ$



Obr. 35 Amplitudo- fázová charakteristika rotoru – obálka předpokládaného řešení pro proměnné parametry fázový posuv ψ_0 , součinitel viskózního tlumení η a tuhosti podpěr.

4.3 Vyhodnocení výsledků

Vliv součinitele viskózního tlumení materiálu η na rotující soustavu, je možno pozorovat z Campbellova diagramu a grafu amplitudo – frekvenční charakteristiky. Z Campbellova diagramu lze vyčíst, že vliv součinitele viskózního tlumení materiálu η na velikost vlastní frekvence rotující soustavy, se projevuje zejména pro nižší otáčky, zatímco pro vyšší otáčky nemá jeho hodnota na velikost vlastní frekvence téměř vliv. Vlastní frekvence soustavy za klidu se v případě rotující soustavy vlivem gyroskopických

účinků rozštěpí na souběžnou a protiběžnou větev. Přetlumením vyšších vlastních tvarů soustavy (43), se vyšší vlastní frekvence rotoru mohou projevit jako kritické otáčky. K jejich utlumení dochází tím rychleji, čím větší je hodnota viskózního tlumení materiálu. V této soustavě se utlumení vlastních tvarů projeví u nižších hodnot otáček. Z těchto poznatků plyne, že na hodnotě viskózního tlumení materiálu jsou závislé zejména hodnoty nižších kritických otáček. Z amplitudo - frekvenční charakteristiky je patrné, že s rostoucí hodnotou součinitele viskózního tlumení materiálu klesá u této soustavy vliv II. vlastní frekvence z protiběžné větve, a naopak se zvyšuje amplituda kmitání při otáčkách rotoru blízkých I. vlastní frekvenci souběžné větve.

Tuhost ve vazbě se může snížit o tuhost podpěr ložiska. Toto snížení uvažujeme až okolo 60%. Změna tuhosti podpor se projeví na hodnotách vlastních frekvencí soustavy. Zdůrazněme, že vlivem změny tuhosti podpěr se mění hodnota kritických otáček. Pokud se hodnota tuhosti podpěr snižuje, hodnoty kritických otáček soustavy se posouvají směrem dolů. S poklesem tuhosti podpěr však roste maximální amplituda kmitání.

Tři proměnné parametry: fázový posuv ψ_0 , součinitel viskózního tlumení η a tuhosti podpěr, výrazně ovlivňují řešení. Pokud provedeme simulaci pro všechny varianty těchto proměnných parametrů, předpokládejme, že skutečné řešení leží v intervalu, který je ohraničen obálkou nejvyšších a nejnižších vypočtených hodnot amplitud. Nejvyšší hodnota amplitudy ve zkoumaném otáčkovém rozsahu je při velikosti úhlové rychlosti $\omega = 2010 \text{ [rad.s}^{-1}\text{]}$ a její hodnota je $v = 0,98 \text{ [mm]}$. Největší podíl na tomto zvýšení má pokles tuhosti uložení, které zvyšuje amplitudu kmitání a snižuje hodnotu kritických otáček rotoru. Druhá špička amplitudy, která se projeví okolo otáček $\omega = 2132 \text{ [rad.s}^{-1}\text{]}$ je nejvíce ovlivňována situací, kdy kolo **B** kmitá s fázovým posuvem 180° .

5. Závěr

V této diplomové práci byla provedena analýza frekvenčních a modálních vlastností rotoru leteckého motoru s uvážením neurčitosti jeho uložení, tlumení a buzení nevývahou. Byly spočteny vlastní frekvence rotoru v závislosti na úhlové rychlosti otáčení s uvážením neurčitosti materiálového tlumení. Se zahrnutím vlivu neurčitosti uložení ložisek, materiálového tlumení a fázového posuvu kmitání mezi oběma koly, byla simulována odezva na buzení nevývahou. Byla provedena simulace pro všechny varianty těchto proměnných parametrů, jejíž výsledkem je obálka nejvyšších a nejnižších vypočtených hodnot amplitud v závislosti na úhlové rychlosti otáčení rotoru, ve které se nachází skutečná odezva na buzení nevývahou. Výsledky analýz jsou zhodnoceny v kapitole 4.3.

Při všech analýzách bylo kontrolováno zahrnutí sférické vazby do výpočtu, jehož princip byl popsán v kapitole 3.3. Její vliv na statické i modální vlastnosti byl ověřen na rovinné úloze se známým řešením.

Popsané analýzy byly provedeny na prutovém modelu, který se skládá ze dvou částí spojených sférickou vazbou. Aby bylo možno takovýto model považovat za dostatečně přesný, musely být jeho tuhostní a modální parametry naladěny podle referenčních hodnot. Proto byly pomocí programu ANSYS vytvořeny prostorové modely jednotlivých částí rotoru, podle nichž byly naladěny příslušné prutové modely jednotlivých částí rotoru.

Dodatek Matice konečných prvků modelovaného rotoru

Dodatek D1 Válcový hřídelový prvek konstantního průřezu

- L - délka prvku
 d_1 - vnitřní průměr prvku
 d_2 - vnější průměr prvku
 J - osový kvadratický moment plochy průřezu prvku vzhledem k jeho průměru
 E - modul pružnosti materiálu prvku
 ρ - hustota materiálu prvku
 m - hmotnost prvku

- \mathbf{M}_e - matice hmotnosti
 \mathbf{K}_e - matice tuhosti
 \mathbf{K}_{Ce} - cirkulační matice
 \mathbf{G}_e - matice gyroskopických účinků

$$m = \frac{\pi}{4} \cdot (d_2^2 - d_1^2) L \rho \quad (\text{D1.1})$$

$$J = \frac{\pi}{64} \cdot (d_2^4 - d_1^4) \quad (\text{D1.2})$$

$$\mathbf{M}_e = \frac{m}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & 22l_e & 54 & 0 & 0 & -13l_e \\ 0 & 156 & -22l_e & 0 & 0 & 54 & 13l_e & 0 \\ 0 & -22l_e & 4l_e^2 & 0 & 0 & -13 & -3l_e^2 & 0 \\ 22l_e & 0 & 0 & 4l_e^2 & 13l_e & 0 & 0 & -3l_e^2 \\ 54 & 0 & 0 & 13l_e & 156 & 0 & 0 & -22l_e \\ 0 & 54 & -13l_e & 0 & 0 & 156 & 22l_e & 0 \\ 0 & 13l_e & -3l_e^2 & 0 & 0 & 22l_e & 4l_e^2 & 0 \\ -13l_e & 0 & 0 & -3l_e^2 & -22l_e^2 & 0 & 0 & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (\text{D1.3})$$

$$\mathbf{K}_e = \frac{EJ}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 6l_e & -12 & 0 & 0 & 6l_e \\ 0 & 12 & -6l_e & 0 & 0 & -12 & -6l_e & 0 \\ 0 & -6l_e & 4l_e^2 & 0 & 0 & 6l_e & 2l_e^2 & 0 \\ 6l_e & 0 & 0 & 4l_e^2 & -6l_e & 0 & 0 & 2l_e^2 \\ -12 & 0 & 0 & -6l_e & 12 & 0 & 0 & -6l_e \\ 0 & -12 & 6l_e & 0 & 0 & 12 & 6l_e & 0 \\ 0 & -6l_e & 2l_e^2 & 0 & 0 & 6l_e & 4l_e^2 & 0 \\ 6l_e & 0 & 0 & 2l_e^2 & -6l_e^2 & 0 & 0 & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (\text{D1.4})$$

$$\mathbf{K}_{\text{ce}} = \eta \cdot \frac{EJ}{l_e^3} \begin{bmatrix} 0 & 12 & -6l_e & 0 & 0 & -12 & -6l_e & 0 \\ -12 & 0 & 0 & -6l_e & 12 & 0 & 0 & -6l_e \\ 6l_e & 0 & 0 & 4l_e^2 & -6l_e & 0 & 0 & 2l_e \\ 0 & 6l_e & -4l_e^2 & 0 & 0 & -6l_e & -2l_e^2 & 0 \\ 0 & -12 & 6l_e & 0 & 0 & 12 & 6l_e & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 6l_e & -12 & 0 & 0 & 6l_e \\ 6l_e & 0 & 0 & 2l_e^2 & -6l_e & 0 & 0 & 4l_e^2 \\ 0 & 6l_e & -2l_e^2 & 0 & 0 & -6l_e & -4l_e^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D1.4})$$

$$\mathbf{G}_{\text{e}} = \frac{m(d_2^2 - d_1^2)}{240l_e^2} \begin{bmatrix} 0 & 36 & -3l_e & 0 & 0 & -36 & -3l_e & 0 \\ -36 & 0 & 0 & -3l_e & 36 & 0 & 0 & -3l_e \\ 3l_e & 0 & 0 & 4l_e^2 & -3l_e & 0 & 0 & l_e^2 \\ 0 & 3l_e & -4l_e^2 & 0 & 0 & -3l_e & l_e^2 & 0 \\ 0 & -36 & 3l_e & 0 & 0 & 36 & 3l_e & 0 \\ 36 & 0 & 0 & 3l_e & -36 & 0 & 0 & 3l_e \\ 3l_e & 0 & 0 & -l_e^2 & -3l_e & 0 & 0 & 4l_e^2 \\ 0 & 3l_e & l_e^2 & 0 & 0 & -3l_e & -4l_e^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D1.5})$$

$$\mathbf{B}_{\text{e}} = \mathbf{K}_{\text{e}} \cdot \boldsymbol{\eta} + \mathbf{M}_{\text{e}} \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad (\text{D1.6})$$

Pořadí prvkových parametrů:

1. posuv ve směru osy y v uzlu i
2. posuv ve směru osy z v uzlu i
3. natočení kolem osy y v uzlu i
4. natočení kolem osy z v uzlu i
5. posuv ve směru osy y v uzlu j
6. posuv ve směru osy z v uzlu j
7. natočení kolem osy y v uzlu j
8. natočení kolem osy z v uzlu j

Dodatek D2 Kotoučový prvek

m - hmotnost prvku
 a - vzdálenost středu hmotnosti kotouče od uzlu i
 I_o - osový hmotový kvadratický moment diskového prvku vzhledem k jeho průměru
 I_P - polární hmotový kvadratický moment diskového prvku

\mathbf{M}_{De} - matice hmotnosti prvku
 \mathbf{G}_{De} - matice gyroskopických účinků

$$\mathbf{M}_{De} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & m.a \\ 0 & m & -m.a & 0 \\ 0 & -m.a & I_o + m.a^2 & 0 \\ m.a & 0 & 0 & I_o + m.a^2 \end{bmatrix} \quad (\text{D2.1})$$

$$\mathbf{G}_{De} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_P \\ 0 & 0 & I_P & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D2.2})$$

Pořadí prvkových parametrů:

1. posuv ve směru osy y
2. posuv ve směru osy z
3. natočení kolem osy y
4. natočení kolem osy z

Dodatek D3 Ložiskový prvek

k_{yy} - tuhost ložiska ve směru osy y

\mathbf{K}_{Le} - matice tuhosti prvku

$$\mathbf{K}_{Le} = \begin{bmatrix} k_y & k_{yz} \\ k_{zy} & k_z \end{bmatrix}, \quad (\text{D3.1})$$

kde pro izotropní ložiska platí:

$$k_y = k_z \quad (\text{D3.2})$$

$$a \quad k_{yz} = k_{zy} = 0 \quad (\text{D3.3})$$

Pořadí prvkových parametrů:

1. posuv ve směru osy y
2. posuv ve směru osy z

Literatura

- [1] Slavík J., Stejskal V.: *Základy dynamiky strojů*, Vydavatelství ČVUT , Praha 1997
- [2] Juliš K., Brepta R.: *Mechanika II. díl – Dynamika*, SNTL, Nakladatelství technické literatury, Praha 1987
- [3] Krämer E.: *Dynamics of Rotors and Foundations*, Springer – Verlag, 1993
- [4] Zorzi E.S., Nelson H.D.: *Finite element simulation of rotor-bearing systems internal damping*, Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Power, january 1977, pp.71-76
- [5] Lenert J.: *Úvod do metody konečných prvků*, VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Ostrava, 1999
- [6] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.: *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*, Elsevier, Sixth edition 2005
- [7] Zapoměl J.: *Přístupy k zahrnutí materiálového tlumení do počítačových modelů mechanických soustav*, Habilitační práce, VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Ostrava, leden 1998
- [8] Mehdigholi H: *Forced Vibration of Rotating Disc and Interaction with Non-rotating structures*, Imperial College of Science, Technology and Medicine, London 1991
- [9] Bittnar, Z., Řeřicha, P. : *Metoda konečných prvků v dynamice konstrukcí*, SNTL, Nakladatelství technické literatury, Praha 1981
- [10] Gasch R, Pfützner H.: *Dynamika rotorů*, SNTL, Nakladatelství technické literatury, Praha 1980
- [11] Ansys Part I. Element Library
- [12] Technická dokumentace rotoru leteckého motoru

Seznam příloh

Příloha 1: Definování geometrie a číslování prvků a uzlů	
Výpis z MATLABu: Program geom.m	Počet stran: 7
Příloha 2: Sestavení globálních matic tuhosti	
Výpis z MATLABu: Program glob.m	Počet stran: 4
Příloha 3: Definování silových účinků od zatížení vlastní tíhou	
Výpis z MATLABu: Program OP.m	Počet stran: 1
Příloha 4: Výpočet průhybu modelu A	
Výpis z MATLABu: Program UL.m	Počet stran: 1
Příloha 5: Výpočet průhybu modelu B	
Výpis z MATLABu: Program UP.m	Počet stran: 1
Příloha 6: Výpočet vlastních frekvencí modelu A	
Výpis z MATLABu: Program vfL.m	Počet stran: 1
Příloha 7: Výpočet vlastních frekvencí modelu B	
Výpis z MATLABu: Program vfP.m	Počet stran: 1
Příloha 8: Sférická vazba	
Výpis z MATLABu: Program spoj.m	Počet stran: 1
Příloha 9: Ladění geometrie a hmotnosti	
Výpis z MATLABu: Programy hmota.m LadeniL.m LadeniP.m	Počet stran: 1
Příloha 10: Výpočet průhybu rotoru a jeho vykreslení pomocí tvarové funkce	
Výpis z MATLABu: Program UG.m	Počet stran: 2
Příloha 11: Výpočet vykreslených vlastních tvarů tlumené soustavy s uvažováním gyroskopických účinků	
Výpis z MATLABu: Program vl_tvar.m	Počet stran: 2
Příloha 12: Campbellův diagram	
Výpis z MATLABu: Program camb.m	Počet stran: 2
Příloha 13: Amplitudo-frekvenční charakteristika rotoru	
Výpis z MATLABu: Program afch.m	Počet stran: 3
Příloha 14: Testovací úloha-rovinná rotační vazba	
Výpis z MATLABu: Program test.m	Počet stran: 3
Příloha 15: Výkresová dokumentace – výkres sestavy	Formát: A1

Příloha 16: Elektronické médium DVD:

text diplomové práce

ASYS soubory: prave.db prave_mod_analyza.db leve.db leve_mod_analyza.db

MATLAB soubory: geom.m glob.m OP.m UL.m UP.m vfL.m vfP.m spoj.m hmota.m

LadeniL.m LadeniP.m UG.m vl_tvar.m camb.m afch.m

Příloha 1: Definování geometrie a číslování prvků a uzlů

Výpis z MATLABu: Program **geom.m**

```
%
% Zadani geometrie, materiálu a ložiskove tuhosti
%
% *****
%tri varianty vypoctu pruhybu
%pro pripad vypoctu celeho rotoru s koutouci varianta=1
%pro pripad vypoctu modelu B bez kotouce varianta=2
%pro pripad vypoctu pruhybu modelu B s kotoucem varianta=3

switch varianta
    case 1
        kot=0;pruhyb=1;BC=0;
    case 2
        kot=4*4;pruhyb=0;BC=1;
    case 3
        kot=0; pruhyb=1;BC=1;
end

% Materialove konstanty a parametry tlumeni

ex    =2.1e11;
ro    =7800;

nyvis=0;
alfat=0;
betat=0;

if BC<1;
nyvis=promena;
alfat=5;
betat=0;
end
%parametry lozisek
%kpod je vliv tuhosti ulozeni
if BC>=1
kpod=1;
end
k11=403300000*kpod;
k12=79400000*kpod;
k13=61700000*kpod;
% Parametry kotouce 1

mk1 =6.134;
jkd1= 0.01934;
jcp1= 0.03792;

rk1 =0.02605;

% Parametry kotouce 2

mk2 =7.58;
jkd2= 0.02547;
jcp2= 0.04964;
```

```

rk2 =0.01292;

% Geometricke rozmery rotoru ( d1e ,d2e , le )

geo(1,1)=0.012;
geo(1,2)=0.018;
geo(1,3)=0.013;

geo(2,1)=0.00926;
geo(2,2)=0.01895;
geo(2,3)=0.011;

geo(3:5,1)=0.018;
geo(3:5,2)=0.04;
geo(3:4,3)=0.013;
geo(5,3)=0.014;

geo(6,1)=0.018;
geo(6,2)=0.03;
geo(6,3)=0.017;

geo(7:18,1)=0.018;
geo(7:18,2)=0.026;
geo(7:8,3)=0.013;
geo(9,3)=0.012;
geo(10:11,3)=0.011;
geo(12:18,3)=0.012;

geo(19,1)=0.0038;
geo(19,2)=0.060;
geo(19,3)=0.01;

geo(20,1)=0.06;
geo(20,2)=0.078;
geo(20,3)=0.008;
%kloub

geo(21,1)=0.040;
geo(21,2)=0.0748;
geo(21,3)=0.012;

geo(22:23,1)=0.036;
geo(22:23,2)=0.052;
geo(22:23,3)=0.014;

geo(24,1)=0.034788;
geo(24,2)=0.04605;
geo(24,3)=0.013;

geo(25,1)=0.036;
geo(25,2)=0.0478;
geo(25,3)=0.017;

geo(26:35,1)=0.036;
geo(26:35,2)=0.046;
geo(26:35,3)=0.0129;

geo(36,1)=0.041646;
geo(36,2)=0.048;

```

```

geo(36,3)=0.014;

geo(37:38,1)=0.036;
geo(37:38,2)=0.046;
geo(37:38,3)=0.012;

geo(39,1)=0.0281;
geo(39,2)=0.044;
geo(39,3)=0.014;

geo(40,1)=0.012991;
geo(40,2)=0.04;
geo(40,3)=0.01;

geo(41,1)=0.022594;
geo(41,2)=0.041934;
geo(41,3)=0.016;

geo(42:43,1)=0.026;
geo(42:43,2)=0.046;
geo(42:43,3)=0.011;

geo(44:45,1)=0.018;
geo(44:45,2)=0.058;
geo(44:45,3)=0.011;

geo(46:49,1)=0.114;
geo(46:49,2)=0.12;
geo(46:49,3)=0.012;

% Prvkova cisla

JOI(1,1)= 1;
JOI(1,2)= 2;

JOI(2,1)= 2;
JOI(2,2)= 3;

JOI(3,1)= 3;
JOI(3,2)= 4;

JOI(4,1)= 4;
JOI(4,2)= 5;

JOI(5,1)= 5;
JOI(5,2)= 6;

JOI(6,1)= 6;
JOI(6,2)= 7;

JOI(7,1)= 7;
JOI(7,2)= 8;

JOI(8,1)= 8;
JOI(8,2)= 9;

JOI(9,1)= 9;
JOI(9,2)= 10;

```

```
JOI (10,1)= 10;  
JOI (10,2)= 11;
```

```
JOI (11,1)= 11;  
JOI (11,2)= 12;
```

```
JOI (12,1)= 12;  
JOI (12,2)= 13;
```

```
JOI (13,1)= 13;  
JOI (13,2)= 14;
```

```
JOI (14,1)= 14;  
JOI (14,2)= 15;
```

```
JOI (15,1)= 15;  
JOI (15,2)= 16;
```

```
JOI (16,1)= 16;  
JOI (16,2)= 17;
```

```
JOI (17,1)= 17;  
JOI (17,2)= 18;
```

```
JOI (18,1)= 18;  
JOI (18,2)= 19;
```

```
JOI (19,1)= 19;  
JOI (19,2)= 20;
```

```
JOI (20,1)= 20;  
JOI (20,2)= 21;
```

```
%kloub
```

```
JOI (21,1)= 22;  
JOI (21,2)= 23;
```

```
JOI (22,1)= 23;  
JOI (22,2)= 24;
```

```
JOI (23,1)= 24;  
JOI (23,2)= 25;
```

```
JOI (24,1)= 25;  
JOI (24,2)= 26;
```

```
JOI (25,1)= 26;  
JOI (25,2)= 27;
```

```
JOI (26,1)= 27;  
JOI (26,2)= 28;
```

```
JOI (27,1)= 28;  
JOI (27,2)= 29;
```

```

JOI (28,1)= 29;
JOI (28,2)= 30;

JOI (29,1)= 30;
JOI (29,2)= 31;

JOI (30,1)= 31;
JOI (30,2)= 32;

JOI (31,1)= 32;
JOI (31,2)= 33;

JOI (32,1)= 33;
JOI (32,2)= 34;

JOI (33,1)= 34;
JOI (33,2)= 35;

JOI (34,1)= 35;
JOI (34,2)= 36;

JOI (35,1)= 36;
JOI (35,2)= 37;

JOI (36,1)= 37;
JOI (36,2)= 38;

JOI (37,1)= 38;
JOI (37,2)= 39;

JOI (38,1)= 39;
JOI (38,2)= 40;

JOI (39,1)= 40;
JOI (39,2)= 41;

JOI (40,1)= 41;
JOI (40,2)= 42;

JOI (41,1)= 42;
JOI (41,2)= 43;

JOI (42,1)= 43;
JOI (42,2)= 44;

JOI (43,1)= 44;
JOI (43,2)= 45;

JOI (44,1)= 45;
JOI (44,2)= 46;

JOI (45,1)= 46;
JOI (45,2)= 47;

    if pruhyb<1;

JOI (46,1)= 47;
JOI (46,2)= 48;

```

```

JOI(47,1)= 48;
JOI(47,2)= 49;

JOI(48,1)= 49;
JOI(48,2)= 50;

JOI(49,1)= 50;
JOI(49,2)= 51;

end

if pruhyb>=1;

JOI(46,1)= 48;
JOI(46,2)=49;

JOI(47,1)= 49;
JOI(47,2)= 50;

JOI(48,1)= 50;
JOI(48,2)= 51;

JOI(49,1)= 51;
JOI(49,2)= 47;

end

% Pocet stupnu volnosti soustavy

n =204-kot;
ne=49-kot/4;

%vektor hmot
mi=zeros(ne,1);

```

Příloha 2: Sestavení globálních matic tuhosti

Výpis z MATLABu: Program **glob.m**

```
%
% Sestavení globalních matic bez spojení kloubem
% Sestavení globalních matic pro model A a model B
%
% *****

%vektor hmot s přidavkem ladění
hmotaL
    for i=1:ne;

d1e=geo(i,1);
d2e=geo(i,2);
le=geo(i,3);

mi(i,1)= mi(i,1)+pi*(d2e^2-d1e^2)*le/4*ro;

    end;

% Vynulování globalních matic

MT=zeros(n,n);
KB=zeros(n,n);
KC=zeros(n,n);
G =zeros(n,n);
B =zeros(n,n);

% Sestavení globalních matic rotoru

for ip=1:ne;

d1e=geo(ip,1);
d2e=geo(ip,2);
le=geo(ip,3);

MTE= [156      0      0      22*le      54      0      0      -13*le
      0      156     -22*le      0      0      54     13*le      0
      0     -22*le      4*le*le      0      0     -13*le     -3*le*le      0
     22*le      0      0      4*le*le     13*le      0      0      -
3*le*le
      54      0      0      13*le     156      0      0     -22*le
      0      54     -13*le      0      0     156     22*le      0
      0     13*le     -3*le*le      0      0     22*le      4*le*le      0
     -13*le      0      0     -3*le*le     -22*le      0      0
4*le*le ];

KBE= [ 12      0      0      6*le     -12      0      0      6*le
      0      12     -6*le      0      0     -12     -6*le      0
      0     -6*le      4*le*le      0      0      6*le      2*le*le      0
      6*le      0      0      4*le*le     -6*le      0      0      2*le*le
     -12      0      0     -6*le      12      0      0     -6*le
      0     -12      6*le      0      0      12      6*le      0
      0     -6*le      2*le*le      0      0      6*le      4*le*le      0
```



```

        6*1e    0    0        2*1e*1e -6*1e    0    0        4*1e*1e ];

KCE= [  0    12    -6*1e    0    0    -12    -6*1e    0
      -12    0    0    -6*1e    12    0    0    -6*1e
        6*1e    0    0    4*1e*1e -6*1e    0    0    2*1e*1e
        0    6*1e -4*1e*1e    0    0    -6*1e -2*1e*1e    0
        0   -12    6*1e    0    0    12    6*1e    0
       12    0    0    6*1e   -12    0    0    6*1e
        6*1e    0    0    2*1e*1e -6*1e    0    0    4*1e*1e
        0    6*1e -2*1e*1e    0    0    -6*1e -4*1e*1e    0    ];

GE= [  0   -36    3*1e    0    0    36    3*1e    0
      36    0    0    3*1e   -36    0    0    3*1e
     -3*1e    0    0   -4*1e*1e    3*1e    0    0    1*1e*1e
        0   -3*1e  4*1e*1e    0    0    3*1e -1*1e*1e    0
        0    36   -3*1e    0    0   -36   -3*1e    0
     -36    0    0   -3*1e    36    0    0   -3*1e
     -3*1e    0    0    1*1e*1e    3*1e    0    0   -4*1e*1e
        0   -3*1e -1*1e*1e    0    0    3*1e  4*1e*1e    0    ];

je=pi/64*(d2e^4-d1e^4);

MTE=mi(ip,1)/420.*MTE;
KBE=ex*je/le^3.*KBE;
KCE=ex*je/le^3.*KCE;
GE =mi(ip,1)/le*(d2e*d2e-d1e*d1e)/(240*1e).*GE;
BE =nyvis.*KBE;

L=zeros(n,8);

i1=4*(JOI(ip,1)-1);
i2=4*(JOI(ip,2)-1);

L(i1+1,1)=1;
L(i1+2,2)=1;
L(i1+3,3)=1;
L(i1+4,4)=1;
L(i2+1,5)=1;
L(i2+2,6)=1;
L(i2+3,7)=1;
L(i2+4,8)=1;

MT=MT+L*MTE*L';
KB=KB+L*KBE*L';
KC=KC+L*KCE*L';
G =G +L*GE *L';
B =B +L*BE *L';

end;

if kot<4;
%Setrvacne ucinky kotoucu:

%kotouc 1
nk1=185;
MT(nk1,nk1)=MT(nk1,nk1)+mk1;
MT(nk1,nk1+3)=MT(nk1,nk1+3)+mk1*rk1;

```

```

MT(nk1+3,nk1)=MT(nk1+3,nk1)+mk1*rk1;
MT(nk1+1,nk1+1)=MT(nk1+1,nk1+1)+mk1;
MT(nk1+1,nk1+2)=MT(nk1+1,nk1+2)-mk1*rk1;
MT(nk1+2,nk1+1)=MT(nk1+2,nk1+1)-mk1*rk1;
MT(nk1+2,nk1+2)=MT(nk1+2,nk1+2)+jkd1+mk1*rk1*rk1;
MT(nk1+3,nk1+3)=MT(nk1+3,nk1+3)+jkd1+mk1*rk1*rk1;

G(nk1+2,nk1+3)=G(nk1+2,nk1+3)-jkp1;
G(nk1+3,nk1+2)=G(nk1+3,nk1+2)+jkp1;

%kotouc 2

nk2=201;
if pruhyb>0;
    nk2=189;
end
MT(nk2,nk2)=MT(nk2,nk2)+mk2;
MT(nk2,nk2+3)=MT(nk2,nk2+3)+mk2*rk2;
MT(nk2+3,nk2)=MT(nk2+3,nk2)+mk2*rk2;
MT(nk2+1,nk2+1)=MT(nk2+1,nk2+1)+mk2;
MT(nk2+1,nk2+2)=MT(nk2+1,nk2+2)-mk2*rk2;
MT(nk2+2,nk2+1)=MT(nk2+2,nk2+1)-mk2*rk2;
MT(nk2+2,nk2+2)=MT(nk2+2,nk2+2)+jkd2+mk2*rk2*rk2;
MT(nk2+3,nk2+3)=MT(nk2+3,nk2+3)+jkd2+mk2*rk2*rk2;

G(nk2+2,nk2+3)=G(nk2+2,nk2+3)-jkp2;
G(nk2+3,nk2+2)=G(nk2+3,nk2+2)+jkp2;

end

% Vypocet globalni matice tlumeni

B=B+alfat*MT+betat*KB;

% Nasobeni cirkulacni matice soucinitelem viskozniho tlumeni

KC=nyvis*KC;
% % Tuhost izotropnich lozisek:
nl1=5;
KB(nl1,nl1)=KB(nl1,nl1)+kl1;
KB(nl1+1,nl1+1)=KB(nl1+1,nl1+1)+kl1;
nl2=101;
KB(nl2,nl2)=KB(nl2,nl2)+kl2;
KB(nl2+1,nl2+1)=KB(nl2+1,nl2+1)+kl2;
nl3=153;
KB(nl3,nl3)=KB(nl3,nl3)+kl3;
KB(nl3+1,nl3+1)=KB(nl3+1,nl3+1)+kl3;

% Sestaveni globalnich matic leveho telesa

nt1=84;
nt=nt1;

ML=zeros(nt,nt);
KL=zeros(nt,nt);

for i=1:nt;
    for j=1:nt;

```

```

    ML(i,j)= MT(i,j);
    KL(i,j)= KB(i,j);

end;
end;

%pomocne lozisko s tuhosti kl1

kl4=kl1;
nl4=73;
    KL(nl4,nl4)=KL(nl4,nl4)+kl4;
    KL(nl4+1,nl4+1)=KL(nl4+1,nl4+1)+kl4;

% Sestaveni globalnich matic praveho telesa

nt2=n-nt1;
nt=nt2;

% Priprava matic soustavy
    MP =zeros(nt,nt);
    KP =zeros(nt,nt);

    for i=nt1+1:n;
        for j=nt1+1:n;

            MP(-nt1+i,-nt1+j)= MT(i,j);
            KP(-nt1+i,-nt1+j)= KB(i,j);

        end;
    end;

```

Příloha 3: Definování silových účinků od zatížení vlastní tíhou

Výpis z MATLABu: Program OP.m

```
% Silove krajove podminky

% Silove zatizeni ( vliv gravitace)
if BC<1;
    g = 9.810;
end
if BC>0;
    g = 9810;
end
FG = zeros(n,1);

for ik=1:nt1/4-1;

d1e=geo(ik,1);
d2e=geo(ik,2);
le=geo(ik,3);
mi(ik,1)=-mi(ik,1)*g;
i=4*(ik-1);

FG(i+2)=FG(i+2)+0.5*mi(ik,1);
FG(i+3)=FG(i+3)-1./12.*mi(ik,1)*le;
FG(i+6)=FG(i+6)+0.5*mi(ik,1);
FG(i+7)=FG(i+7)+1./12.*mi(ik,1)*le;

end;
for ik=nt1/4:n/4-2;

d1e=geo(ik,1);
d2e=geo(ik,2);
le=geo(ik,3);
mi(ik,1)=-mi(ik,1)*g;
i=4*(ik);

FG(i+2)=FG(i+2)+0.5*mi(ik,1);
FG(i+3)=FG(i+3)-1./12.*mi(ik,1)*le;
FG(i+6)=FG(i+6)+0.5*mi(ik,1);
FG(i+7)=FG(i+7)+1./12.*mi(ik,1)*le;
end;
%pro teleso spojene kloubem
if BC<1;
    kn=86;
    FG(kn-4)=FG(kn-4)+FG(kn);
    FG(kn)=0;
end

% sila od kotoucu
if pruhyb>0;
FG(nk1+1,1)=FG(nk1+1,1)-mk1*g;
FG(nk1+2,1)=FG(nk1+2,1)-mk1*g*rk1;
FG(nk2+1,1)=FG(nk2+1,1)-mk2*g;
FG(nk2+2,1)=FG(nk2+2,1)+mk2*g*(rk2);
end
```

Příloha 4: Výpočet průhybu modelu A

Výpis z MATLABu: Program UL.m

```
%% vypocet prubybu leve casti rotoru
```

```
% Zatizeni vlastni tihou
```

```
FL=FG(1:nt1);
```

```
% Vypocet vektoru posunutí
```

```
u = KL^(-1)*FL;
```

```
% Vykreslení průhybu
```

```
le =geo(1:nt1/4-1,3);
```

```
x = zeros(nt1/4,1);
```

```
x(1,1)=0;
```

```
for i=1:(nt1/4-1)
```

```
x(i+1,1)=sum(le(1:i))*1000;
```

```
end
```

```
p=zeros(nt1/4,1);
```

```
p(1,1)=u(2)*1000;
```

```
for i=1:nt1/4-1;
```

```
p(i+1,1)=u(i*4+2)*1000;
```

```
end
```

```
min(p)
```

```
r=zeros(nt1/4,2);
```

```
r(:,1)=x(:,1);
```

```
r(:,2)=p(:,1);
```

```
r
```

```
plot(x,p,'r')
```

```
title('Prubyb leve casti rotoru')
```

```
ylabel('u [mm]')
```

```
xlabel('x [mm]')
```

```
hold off
```

Příloha 5: Výpočet průhybu modelu B

Výpis z MATLABu: Program UP.m

```
% vypocet prubybu prave casti rotoru

% Zatizeni vlastni tihou

FP=FG(nt1+1:n);

% Vypocet vektoru posunutí

u = KP^(-1)*FP;

% Vykreslení průhybu
le=zeros(nt2/4-1,1);
le =geo(nt1/4:n/4-2,3);

x = zeros(nt2/4,1);
x(1,1)=0;

for i=1:(nt2/4-1)

x(i+1,1)=sum(le(1:i))*1000;

end
if pruhyb>0;
for i=nt2/4-4:nt2/4-1;
x(i+1,1)=x(nt2/4-4,1)-(nt2/4-i)*10.5;
end
%
end
p=zeros(nt2/4,1);
p(1,1)=u(2)*1000;

for i=1:nt2/4-1;

p(i+1,1)=u(i*4+2)*1000;

end

r=zeros(nt2/4,2);
r(:,1)=243+x(:,1);
r(:,2)=p(:,1);
r

plot(r(:,1),p,'r')

title('Pruhyb prave casti rotoru')
ylabel('u [mm]')
xlabel('x [mm]')

hold off
```

Příloha 6: Výpočet vlastních frekvencí modelu A

Výpis z MATLABu: Program **vfL.m**

```
%  
% Vypocetl vlastnich frekvenci modelu A  
%  
% *****  
  
[U,lup]=(eig(KL,ML));  
  
vf1=diag(lup);  
vf1=sqrt(vf1)/2/pi;
```

Příloha 7: Výpočet vlastních frekvencí modelu B

Výpis z MATLABu: Program **vfP.m**

```
%  
% Vypocetl vlastnich frekvenci praveho telesa  
%  
% *****  
  
[U,lup]=(eig(KP,MP));  
  
vf2=diag(lup);  
vf2=sqrt(vf2)/2/pi;  
vf2(1:2:20)
```

Příloha 8: Sférická vazba

Výpis z MATLABu: Program spoj.m

```
%  
% Sestavení globalních matic se spojením sferickou vazbou  
%  
% *****  
  
%  
  
% číslo k vynulování  
kn=85;kn=86;  
for kn=85:86;  
%príctení k předchozímu, vymazání ř i s a doplnění diagonaly  
SKB=KB(:,kn);  
SMT=MT(:,kn);  
SKC=KC(:,kn);  
SG=G(:,kn);  
SB=B(:,kn);  
KB(:,kn-4)=KB(:,kn-4)+SKB;  
KB(kn-4,:)=KB(kn-4,:)+SKB';  
MT(:,kn-4)=MT(:,kn-4)+SMT;  
MT(kn-4,:)=MT(kn-4,:)+SMT';  
KC(:,kn-4)=KC(:,kn-4)+SKC;  
KC(kn-4,:)=KC(kn-4,:)+SKC';  
G(:,kn-4)=G(:,kn-4)+SG;  
G(kn-4,:)=G(kn-4,:)+SG';  
B(:,kn-4)=B(:,kn-4)+SB;  
B(kn-4,:)=B(kn-4,:)+SB';  
%diagonalní prvky  
KB(kn-4,kn-4)=KB(kn-4,kn-4)+SKB(kn);  
MT(kn-4,kn-4)=MT(kn-4,kn-4)+SMT(kn);  
KC(kn-4,kn-4)=KC(kn-4,kn-4)+SKC(kn);  
G(kn-4,kn-4)=G(kn-4,kn-4)+SG(kn);  
B(kn-4,kn-4)=B(kn-4,kn-4)+SB(kn);  
%vymazání kn-teho ř i s  
KB(:,kn)=0; KB(kn,:)=0; MT(:,kn)=0; MT(kn,:)=0;  
KC(:,kn)=0; KC(kn,:)=0; G(:,kn)=0; G(kn,:)=0;  
B(:,kn)=0; B(kn,:)=0;  
%diagonalní prvky  
%známa frekvence  
KB(kn,kn)=1;  
MT(kn,kn)=0.1;  
B(kn,kn)=100; KC(kn,kn)=1; G(kn,kn)=0;  
end
```


Příloha 9: Ladění geometrie a hmotnosti

Výpis z MATLABu: Program **hmota.m**

```
mi(1,1)=mi(1,1)+0.06;  
mi(2,1)=mi(2,1)+0.02;  
mi(3:5,1)=mi(3:5,1)+0.002;  
mi(7:18,1)=mi(7:18,1)-0.003;  
mi(19,1)=mi(19,1)+0.165;  
mi(20,1)=mi(20,1)+0.12;  
  
mi(21,1)=mi(21,1)-0.168;  
mi(22,1)=mi(22,1)+0.014;  
mi(26:35,1)=mi(26:35,1)+0.0198;
```

Výpis z MATLABu: Program **LadeniL.m**

```
geo(1,1)=geo(1,1)-0.00;  
geo(1,2)=geo(1,2)-0.0015;  
geo(2,1)=geo(2,1)+0.005;  
geo(2,2)=geo(2,2)-0.00295;  
geo(3:5,1)=geo(3:5,1)-0.0135;  
geo(3:5,2)=geo(3:5,2)-0.004;  
geo(7:18,1)=geo(7:18,1)-0.001;  
geo(7:18,2)=geo(7:18,2)-0.0015;  
geo(19,1)=geo(19,1)+0.0144;  
geo(19,2)=geo(19,2)+0.02;  
geo(20,1)=geo(20,1)+0.02;  
geo(20,2)=geo(20,2)+0.01;
```

Výpis z MATLABu: Program **LadeniP.m**

```
geo(21,2)=geo(21,2)+0.013;  
geo(22:23,1)=geo(22:23,1)-0.001;  
geo(22:23,2)=geo(22:23,2)+0.001;  
geo(26:35,1)=geo(26:35,1)+0.001;  
geo(26:35,2)=geo(26:35,2)-0.003;  
geo(24,1)=geo(24,1)-0.006;  
geo(24,2)=geo(24,2)-0.005;  
geo(25,1)=geo(25,1)-0.006;  
geo(25,2)=geo(25,2)-0.005;
```

Příloha 10: Výpočet průhybu rotoru a jeho vykreslení pomocí tvarové funkce

Výpis z MATLABu: Program UG.m

```
geom
LadeniL
LadeniP
glob
spoj
OP
om = 23500*2*pi/60*0.5;
      O=zeros(n,n);
      KK= KB+om*KC;

%Vypocet pruhu
      nf=1;
      F0 = FG;
      U = KK\F0;
%pocatek:
x=[0];
for ip=1:20;
      i=ip*4-3;
      le=geo(ip,3);
      x=[x;x(ip)+le];
      l1=x(ip);l2=x(ip+1);
      A=[l1^3 l1^2 l1 1;3*l1^2 2*l1 1 0;l2^3 l2^2 l2 1;3*l2^2 2*l2 1 0];
      v=[U(i,nf);U(i+3,nf);U(i+4,nf);U(i+4+3,nf)];
      w=[U(i+1,nf);-U(i+2,nf);U(i+4+1,nf);-U(i+4+2,nf)];
      a=A\v;
      b=A\w;
      x1=[l1:0.000001:l2];
      y=(a(1).*x1.^3+a(2).*x1.^2+a(3).*x1+a(4))*1000;
      z=(b(1).*x1.^3+b(2).*x1.^2+b(3).*x1+b(4))*1000;
      plot3(x1*1000,z,y,'r');

      hold on
end
%sfericka vazba
for ip=21:45
      i=ip*4+1;le=geo(ip,3);
      x=[x;x(ip)+le];
      l1=x(ip);l2=x(ip+1);
      A=[l1^3 l1^2 l1 1;3*l1^2 2*l1 1 0;l2^3 l2^2 l2 1;3*l2^2 2*l2 1 0];
      v=[U(i,nf);U(i+3,nf);U(i+4,nf);U(i+4+3,nf)];
      w=[U(i+1,nf);-U(i+2,nf);U(i+4+1,nf);-U(i+4+2,nf)];
      if ip<=21;
            v=[U(i-4,nf);U(i+3,nf);U(i+4,nf);U(i+4+3,nf)];
            w=[U(i+1-4,nf);-U(i+2,nf);U(i+4+1,nf);-U(i+4+2,nf)];
      end;
      a=A\v;
      b=A\w;
      x1=[l1:0.000001:l2];
      y=(a(1).*x1.^3+a(2).*x1.^2+a(3).*x1+a(4))*1000;
      z=(b(1).*x1.^3+b(2).*x1.^2+b(3).*x1+b(4))*1000;
      plot3(x1*1000,z,y,'r');
```

```

        hold on
end
%vraceni
%pocatek:
x=[0.516];
for ip=46:49
    i=ip*4+5;le=geo(ip,3);
    x=[x;x(ip-45)+le];
    l1=x(ip-45);l2=x(ip-45+1);
    A=[l1^3 l1^2 l1 1;3*l1^2 2*l1 1 0;l2^3 l2^2 l2 1;3*l2^2 2*l2 1 0];
    if ip<49;
        v=[U(i,nf);U(i+3,nf);U(i+4,nf);U(i+4+3,nf)];
        w=[U(i+1,nf);-U(i+2,nf);U(i+4+1,nf);-U(i+4+2,nf)];
    end
    if ip>=49;
        i=185;
        v=[U(n-3,nf);U(n+3-3,nf);U(i,nf);U(i+3,nf)];
        w=[U(n+1-3,nf);-U(n+2-3,nf);U(i+1,nf);-U(i+2,nf)];
    end;
    a=A\v;
    b=A\w;
    x1=[l1:0.000001:l2];
    y=(a(1).*x1.^3+a(2).*x1.^2+a(3).*x1+a(4))*1000;
    z=(b(1).*x1.^3+b(2).*x1.^2+b(3).*x1+b(4))*1000;
    plot3(x1*1000,z,y,'r');

    hold on

end

    xlabel('osa x [mm]')
    ylabel('pruhyb w [mm]')
    zlabel('pruhyb v')

    title('Pruhyb rotoru od zatizeni vlastni tihou')

    hold on;

```

Příloha 11: Výpočet vykreslení vlastních tvarů tlumené soustavy s uvážením gyroskopických účinků

Výpis z MATLABu: Program vl_tvar.m

```
function vl_tvar(nf,suda)
%nf - cislo vlastni frekvence
%suda-je nf suda? ANO suda=1, NE suda=0
promena=5.8e-7;kpod=1;
geom
LadeniL
LadeniP
glob
spoj
OP
om = 23500*2*pi/60*0.5;
%frekvence
%nf=2;
O=zeros(n,n);
MM= MT;
KK= KB+om*KC;
BB= B-om*G;
K2=[ MM O
      O -KK ];
M2=[ O MM
      MM BB ];
% Vypocet vlastniho tvaru iteho tvaru
[vv,ei]=(eig(K2,M2));
[eii]=(diag(ei));
[eisort,ii]=sort(eii);
for i=1:2*n;
    vvsort(:,i)=(vv(:,ii(i)));
end
for j=1:2*n;
for i=1:n;
    U(i,j)=abs(vvsort(n+i,j));
end
end
%pocatecni geometrie
x=[0];y=zeros(51,1);z=zeros(51,1);
le=zeros(49,1);le(:,1)=geo(:,3);
y(1,1)=U(1,nf);
z(1,1)=U(1+1,nf);
for ip=1:20;
    i=ip*4+1;in=ip+1;
    x=[[x];x(ip)+le(ip)];
    y(in,1)=U(i,nf);
    z(in,1)=U(i+1,nf);
end
%sfericka vazba
x=[[x];x(21)];
for i=1:24+4;
    x(22+i,1)=sum(le(1:i+20),1);
end
for ip=21:45
    i=ip*4+1;in=ip+1;
    if ip>21;
```

```

end
    y(in,1)=U(i,nf);
    z(in,1)=U(i+1,nf);
    if ip<=21;

        y(in,1)=U(81,nf);
        z(in,1)=U(82,nf);
    end;
end;
y(47,1)=U(185,nf);
z(47,1)=U(185+1,nf);

%vraceni
%pocatek:
in=0;z2=zeros(5,1);y2=zeros(5,1);
x2=[0.516;0.516+0.012;0.516+0.012*2;0.516+0.012*3;0.516+0.012*4];
for in=1:4;
    i=(in+47)*4-3;
    y2(in,1)=U(i,nf);
    z2(in,1)=U(i+1,nf);
end
    % if ip>=49;
    i=185;
    y2(5,1)=U(i,nf);
    z2(5,1)=U(i+1,nf);
    % end

    xk=[x(1:47)]; zk=[z(1:47)];yk=[y(1:47)];
if suda>=1
    plot(xk*1000,zk,'r');
    hold on
    plot(x2*1000,z2,'b');
    ylabel('w')
else
    plot(xk*1000,yk,'r');
    hold on
    plot(x2*1000,y2,'b');
    ylabel('v')
    hold off
end
    xlabel('osa x [mm]')
    title('Valstni tvar ')

hold off

```

Příloha 12: Campbellův diagram

Výpis z MATLABu: Program **camb.m**

```
%campbeluv diagram

%hodnota tlumeni , procenti zmena tuhosti lozisek
promena=5.8e-7;kpod=1;

%nacteni globalnich matic rotoru
geom
LadeniL
LadeniP
glob
spoj
% Priprava matic druhého radu
    omg=23500*2*pi/60;
    no=60;
    nf=7;
    om=zeros(no+1,1);
    VF=zeros(nf,no+1);
    VHkr=zeros(nf+6,no+1);konst=0;
    VH=zeros(nf,no+1);
    O=zeros(n,n);

    for io=1:no+1;

        om(io,1) = omg*(io-1)/no;

        MM= MT;
        KK= KB+om(io,1)*KC;
        BB= B-om(io,1)*G;

        K2=[ MM    O
              O -KK ];

        M2=[  O  MM
              MM  BB ];

% Vypocet vlastnich cisel a tvaru

la=sort(eig(K2,M2));

% Vypocet vlastnich frekvenci

laimag=(imag(la))/2/pi;
i=0;
    for iv=1:2*n;
        VH(iv,io)=(la(iv));
        VHI(iv,io)=(laimag(iv));
        if laimag(iv)>0
            i=i+1;
        VF(i,io)=(laimag(iv));
```

```

        if i<nf+1;
            VHkr(i,:)=(VF(i,:));
        end;
    end;
end;

%rucni serazeni pro no=60
if promena>=1.2e-6;
    rz=5; rk=11;
    if no>=120;
rz=7;rk=21;
        end
        POMM=VHkr(4,rz:rk);
        VHkr(4,rz:rk)=VHkr(5,rz:rk);
        VHkr(5,rz:rk)=POMM;
        POM=VHkr(5:nf,rk+1:no+1);
        VHkr(6:nf+1,rk+1:no+1)=POM;
        VHkr(5,rk+1:no+1)=0;
    end
    if promena<=5.8e-7;
        rz=7; rk=16;
        if no>=120;
            rz=11;rk=31;
        end
        POMM=VHkr(4,rz:rk);
        VHkr(4,rz:rk)=VHkr(5,rz:rk);
        VHkr(5,rz:rk)=POMM;
        POM=VHkr(5:nf,rk+1:no+1);
        VHkr(6:nf+1,rk+1:no+1)=POM;
        VHkr(5,rk+1:no+1)=0;
    end
end

for ikr=1:nf-1;

    plot(om,VHkr(ikr,:), 'g');
    hold on;
    plot(om,om/2/pi, 'r');
    hold on;
end

xlabel('Rychlost otaceni rotoru [rad/s]')
ylabel('Imaginarni slozka vlastni frekvnce [Hz]')
title('Campbellův diagram rotoru leteckého motoru')
hold on;

```

Příloha 13: Amplitudo-frekvenční charakteristika rotoru

Výpis z MATLABu: Program **afch.m**

```
%Amplitudo frekvencni charakteristika
%vykreslovany uzel cislo:
bod=nk2;
psi = 0*2*pi/360;
omg = 23500*2*pi/60;
no = 120;
om = zeros(no,1);
qmax=zeros(n,no);
qmin=10+zeros(n,no);
kpod=1; promena=5.8000e-007;
for promena=5.8000e-007:(-5.8000e-007+1.2000e-006):1.2000e-006;
for kpod=0.6:0.05:1;
for psi=0*2*pi/360:60*2*pi/360:360*2*pi/360;

    %Sestaveni globalnich matic
geom
LadeniL
LadeniP
glob
spoj
    %Zatizeni vlastni tihou
    OP

    % Sestaveni matice soustavy
    for io=1:no

        om(io,1) = omg*io/no;

        for i=1:n;
        for j=1:n;
            MM(i,j) = MT(i,j);
            KK(i,j) = KB(i,j)+om(io,1)*KC(i,j);
            BB(i,j) = B(i,j)-om(io,1)*G(i,j);
            SC1(i,j) = KK(i,j)-(om(io,1)^2)*MM(i,j);
            SC2(i,j) = om(io,1)*BB(i,j);

            end;
        end;
        SC = [ SC1 SC2
               -SC2 SC1];

    % Parametry nevyvazku na jednotlivych kotoucich s menicimi se parametry

        e1 = 0.000001;
        me1 = mk1;
        alf1 = 0;

        e2 = 0.000001;
        me2 = mk2;
        alf2 = psi;
```



```
% Vektor siloveho pusobeni od nevyvazku a tihovych sil
```

```
Fsc = zeros(2*n,1);
F0 = zeros(n,1);

Fa1 = me1*e1*om(io,1)^2;
Fa2 = me2*e2*om(io,1)^2;
```

```
%kotouc 1
```

```
Fsc(nk1,1) = Fa1*cos(alf1);
Fsc(nk1+1,1) = Fa1*sin(alf1);
Fsc(nk1+2,1) =Fa1*rk1*cos(alf1);
Fsc(nk1+3,1) =-Fa1*rk1*sin(alf1);

Fsc(nk1*2,1) = -Fa1*sin(alf1);
Fsc(nk1*2+1,1) = Fa1*cos(alf1);
Fsc(nk1*2+2,1) =-Fa1*rk1*sin(alf1);
Fsc(nk1*2+3,1) =-Fa1*rk1*cos(alf1);
```

```
%kotouc 2
```

```
Fsc(nk2,1) = Fa2*cos(alf2);
Fsc(nk2+1,1) = Fa2*sin(alf2);
Fsc(nk2+2,1) =-Fa2*rk2*cos(alf2);
Fsc(nk2+3,1) =-Fa2*rk2*sin(alf2);

Fsc(nk2*2,1) = -Fa2*sin(alf2);
Fsc(nk2*2+1,1) = Fa2*cos(alf2);
Fsc(nk2*2+2,1) =Fa2*rk2*sin(alf2);
Fsc(nk2*2+3,1)=Fa2*rk2*cos(alf2);
```

```
%vlastni tiha - priklad
```

```
F0 = -FG;
```

```
% Vypocet amplitud kmitani
```

```
% xo staticky pruhyb od vlastni tihy
```

```
xo = KK\F0;
```

```
xsc = SC\Fsc;
```

```
xc = xsc(1:n);
```

```
xs = xsc(n+1:n*2);
```

```
for ii=1:n;
```

```
% q(ii,io) = xo(ii)+((xs(ii)^2)+(xc(ii)^2))^0.5;
```

```
%q(ii,io) = xo(ii);
```

```
q(ii,io) =[(xs(ii)^2)+(xc(ii)^2))^0.5]*1000;
```

```
qii=q(ii,io);
```

```
qmaxii=qmax(ii,io);
```

```
qminii=qmin(ii,io);
```

```
if qii>qmaxii;
```

```
    qmax(ii,io)=qii;
```

```
end
```

```
if qii<qminii;
```

```
    qmin(ii,io)=qii;
```

```
end
```

```
end;
```

```
end;
```

```

end;
end;
end;

% plot(om,q(bod,:), 'b');
plot(om,qmin(bod,:), 'r');
hold on
plot(om,qmax(bod,:), 'b');
hold on
xlabel('Rychlost otacení rotoru [rad/s]')
ylabel('Amplituda kmitání [mm]')
title('Amplitudo-frekvenční charakteristika rotoru leteckého
      motoru')

hold on
%end;

```

Příloha 14: Testovací úloha-rovinná rotační vazba

Výpis z MATLABu: Program **test.m**

```
%nosnik se rotacni vazbou

% Materialove konstanty
ex =2.1e11;
ro= 7800;

% Prvkova cisla

JOI(1,1)= 1;
JOI(1,2)= 2;

JOI(2,1)= 2;
JOI(2,2)= 3;

JOI(3,1)= 3;
JOI(3,2)= 4;

JOI(4,1)= 4;
JOI(4,2)= 5;

JOI(5,1)= 6;
JOI(5,2)= 7;

% Pocet stupnu volnosti soustavy

n =14;
ne=5;

% Vynulovani globalnich matic

MT=zeros(n,n);
KG=zeros(n,n);

% Sestaveni globalnich matic nosniku
for ip=1:ne;

% Geometricke rozmery, delka jednoho prvku
le=1;
de=0.08;

KE= [ 12 6*le -12 6*le;
      6*le 4*le*le -6*le 2*le*le;
      -12 -6*le 12 -6*le;
      6*le 2*le*le -6*le 4*le*le];

ME= [ 156 22*le 54 -13*le;
      22*le 4*le*le 13*le -3*le*le;
      54 13*le 156 -22*le;
      -13*le -3*le*le -22*le 4*le*le];
```

```

je=pi/64*de^4;
mi=pi/4*de*de*ro;

KE=ex*je/le^3.*KE;
MTE=mi*le/420.*ME;
L=zeros(n,4);

i1=2*(JOI(ip,1)-1);
i2=2*(JOI(ip,2)-1);

L(i1+1,1)=1;
L(i1+2,2)=1;
L(i2+1,3)=1;
L(i2+2,4)=1;

MT=MT+L*MTE*L';
KG=KG+L*KE*L';
end;
% Kloub
% Simulace klouboveho spojeni

% cislo k vynulovani
kn=11;
SK=KG(:,kn);
SM=MT(:,kn);
%pricteni k predchozimu, vymazani r i s a doplneni diagonaly
KG(:,kn-2)=KG(:,kn-2)+SK;
KG(kn-2,:)=KG(kn-2,:)+SK';
MT(:,kn-2)=MT(:,kn-2)+SM;
MT(kn-2,:)=MT(kn-2,:)+SM';
%diagonalni prvky
KG(kn-2,kn-2)=KG(kn-2,kn-2)+SK(kn);
MT(kn-2,kn-2)=MT(kn-2,kn-2)+SM(kn);
%vymazani r i s kn
KG(:,kn)=0; KG(kn,:)=0; MT(:,kn)=0; MT(kn,:)=0;
%diagonalni prvky
%znama frekvence
KG(kn,kn)=(2*pi)^2;
MT(kn,kn)=1;

%
% okrajove podminky
%pocet okrajovych podminek

nbc=1;
%okrajove podminky
bc1=[1];
KG(bc1,:)=[]; KG(:,bc1)=[]; MT(bc1,:)=[]; MT(:,bc1)=[];
%pocet okrajovych podminek
nbc=2;
bc2=[5-1];
KG(bc2,:)=[]; KG(:,bc2)=[]; MT(bc2,:)=[]; MT(:,bc2)=[];
%pocet okrajovych podminek
nbc=3;
bc3=[13-2];
KG(bc3,:)=[]; KG(:,bc3)=[]; MT(bc3,:)=[]; MT(:,bc3)=[];

%dimenze ulohy
bc=n-nbc;

```

```

% Zatizeni osamelymi silami
fst=zeros(n-nbc,1);
%odpovida nove matici KG
nf=5;
fst(nf)=-1000;
u=KG\fst;
p=[0;u(1:3);0;u(4:10);0;u(11)]

%
% Vypocet vlastnich frekvenci

om=sort(real(sqrt(eig(KG,MT))));

for i=1:bc;

vf1(i,1)=(om(i))/(2*pi);

end;

vf1

```